Übungsaufgaben zur Vorlesung

Klassische Theoretische Physik I

Priv.-Doz. Dr. R. Bulla

SS 2013

Blatt 11: Abgabetermin: Dienstag, der 16.07.2013, 10:00

Aufgabe 1: Stokes'scher Satz

Gegeben sei ein Vektorfeld

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{2}\vec{b} \times \vec{r} \quad \text{mit} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Berechnen Sie das Linienintegral $\oint_C \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$ über die Kreislinie in der x-z-Ebene mit Zentrum der Kreisfläche bei $(0,0,0)$ und Radius R, und zwar

a) durch explizite Berechnung des Linienintegrals und

b) unter Verwendung des Stokes'schen Satzes durch die Berechnung des entsprechenden Flächenintegrals.

Aufgabe 2: Bildladungsmethode für kontinuierliche Ladungsverteilung

In dieser Aufgabe wird die Punktladung (siehe das Beispiel in der Vorlesung) ersetzt durch eine kontinuierliche Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ mit $\vec{r} \in V$ und $V = \{\vec{r} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x < 0\}$. Die Metalloberfläche sei weiterhin gegeben durch $F = \{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 | x = 0\}$ und die Randbedingung sei gegeben durch $\phi(\vec{r}) = 0$ für $\vec{r} \in F$.

a) Konstruieren Sie eine Ladungsverteilung $\rho_0(\vec{r})$, die für $\vec{r} \in V$ mit $\rho(\vec{r})$ übereinstimmt, und die die Randbedingung für das Potential für $\vec{r} \in F$ erfüllt.

b) Berechnen Sie die Normalkomponente des elektrischen Feldes auf der Metalloberfläche und damit die Oberflächenladungsdichte $\sigma(\vec{r})$.

c) Überprüfen Sie das Ergebnis für $\sigma(\vec{r})$ für die in der Vorlesung untersuchte Ladungsverteilung, also für $\rho(\vec{r}) = q\delta(\vec{r} - \vec{a})$.

Aufgabe 3: Magnetfeld

Gegeben sei die Stromdichte eines unendlich dünnen Drahts

$$\vec{j}(\vec{r}) = j\delta(x)\delta(y)\vec{e}_z \ .$$

Berechnen Sie das von dieser Stromdichte erzeugte Magnetfeld mit Hilfe des Stokes'schen Satzes für $\vec{B}(\vec{r})$.
Hinweise:

- Setzen Sie für das Magnetfeld die Form (in Zylinderkoordinaten) $\vec{B}(\vec{r}) = f(\rho)\vec{e}_\varphi$ an, mit dem Einheitsvektor $\vec{e}_\varphi = \frac{1}{\rho}(-y, x, 0)$ in φ-Richtung, dem radialen Abstand $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ von der z-Achse und einer zu bestimmenden Funktion $f(\rho)$.
- Verwenden Sie als Integrationsweg für das Linienintegral eine geschlossene Kreislinie in der x-y-Ebene mit Radius ρ um den Koordinatenursprung.