Übungsaufgaben zur Vorlesung

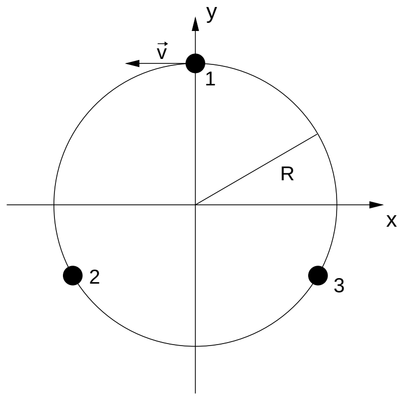
Klassische Theoretische Physik I

Priv.-Doz. Dr. R. Bulla

SS 2013

Blatt 2: Abgabetermin: Dienstag, der 23.04.2013, 10:00

Aufgabe 1: Drei-Körper-Problem



Betrachten Sie das in der Abbildung dargestellte Drei-Körper-Problem, bei dem sich drei Körper mit Massen $m_i = m$ auf einer Kreisbahn mit Radius R um den Ursprung bewegen. Der Betrag der Geschwindigkeiten ist für alle Körper konstant, $|\vec{v}(t)| = v$, die drei Körper liegen damit immer auf den Ecken eines rotierenden gleichseitigen Dreiecks.

a) Bestimmen Sie für diese Geometrie die Kraft $\vec{F}$ auf den Körper 1 aufgrund der Gravitationskraft, die durch die beiden anderen Körper auf diesen ausgeübt wird.

b) Wie groß muss v sein, damit der Körper 1 auf der Kreisbahn mit Radius R bleibt?

(4 Punkte)

Aufgabe 2: Newton'sche Bewegungsgleichung für N-Teilchen-System

Betrachten Sie ein System aus N Teilchen (Massenpunkten mit Massen m_i, $i = 1, \ldots N$), die über die Gravitationskraft miteinander wechselwirken. Zusätzlich befinden sich die Teilchen in einem äußeren Kraftfeld $\vec{F}_e(\vec{r})$.

a) Wie lauten die Newton'schen Bewegungsgleichungen für die Koordinaten $\vec{r}_i$ der Teilchen?

b) Setzen Sie nun $\vec{F}_e(\vec{r}) = 0$. Zeigen Sie, dass innere Kräfte ein System aus Massenpunkten (das oben definierte N-Teilchen-System) nicht beschleunigen können. Betrachten Sie dazu die zweite zeitliche Ableitung der Schwerpunktskoordinate $\vec{R}$ mit

$$\vec{R} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i \quad , \quad M = \sum_{i=1}^{N} m_i \ .$$

(4 Punkte)

Aufgabe 3: Galilei-Transformation, Galilei-Invarianz

a) Zeigen Sie, dass das 2. Newton'sche Axiom bei Anwesenheit von Reibungskräften nicht invariant ist unter Galilei-Transformationen.

b) Die Galilei-Transformationen

$$\hat{G} : (\vec{r}, t) \to (\vec{r}\,', t') = (\hat{D}\vec{r} + \vec{r}_0 - \vec{\omega}t, t + t_0)$$

bilden eine Gruppe. Zeigen Sie, dass die Verknüpfung zweier Transformationen $\hat{G}_1$ und $\hat{G}_2$ ein Element der Galilei-Gruppe ist und geben Sie die definierenden Größen der resultierenden Transformation, d.h. $\hat{D}$, $\vec{r}_0$, $\vec{\omega}$ und t_0, an.

(5 Punkte)

Aufgabe 4: Drehimpuls

a) Die Bahn eines Körpers sei gegeben durch $\vec{r}(t)$, der Drehimpuls $\vec{l}(t)$ werde relativ zum Bezugspunkt $\vec{r}_0 = \vec{0}$ bestimmt. Zeigen Sie, dass die vom Vektor $\vec{r}$ überstrichene Fläche A mit der Zeit wie

$$\Delta A = \frac{|\vec{l}(t)|}{2m}\Delta t$$

zunimmt.

b) Zeigen Sie, dass der Gesamtdrehimpuls $\vec{L}$ eines N-Teilchen-Systems für $\vec{F}_\mathrm{e} = \vec{0}$ (keine äußeren Kräfte) eine Erhaltungsgröße ist.

c) Betrachten Sie ein System mit zwei Teilchen (Koordinaten $\vec{r}_1(t)$, $\vec{r}_2(t)$; Massen m_1, m_2). Schwerpunkts- und Relativkoordinate dieses Systems sind gegeben durch

$$\vec{R} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{2} m_i \vec{r}_i \quad , \quad \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \ .$$

Geben Sie den Gesamtdrehimpuls $\vec{L}$ dieses Systems in den Koordinaten $\vec{R}$ und $\vec{r}$ (und deren Ableitungen) an.

(6 Punkte)