Übungsaufgaben zur Vorlesung

Klassische Theoretische Physik I

Priv.-Doz. Dr. R. Bulla

SS 2013

Blatt 3: Abgabetermin: Dienstag, der 30.04.2013, 10:00

Aufgabe 1: Energieerhaltung für N-Teilchen-System

Die Gesamtenergie eines N-Teilchen-Systems E ist die Summe aus der gesamten kinetischen Energie T und der gesamten potentiellen Energie V, wobei sich V aus inneren und äußeren Anteilen zusammensetzt. Zeigen Sie, dass E eine Erhaltungsgröße ist. Hinweis: Der Beweis wurde in der Vorlesung nur skizziert, gefragt ist hier der vollständige Beweis.

(4 Punkte)

Aufgabe 2: Krummlinige Koordinaten

a) Ein Körper der Masse m befindet sich in einem Zentralkraftfeld der Form $\vec{F}(\vec{r}) = f(r)\vec{e}_r$, wobei die Bewegung auf die x-y-Ebene eingeschränkt ist. Wie lautet die Newton'sche Bewegungsgleichung in ebenen Polarkoordinaten r und φ? Lösen Sie diese Differentialgleichungen für den Spezialfall einer Kreisbahn mit der Anfangsbedingung $\vec{r}(t = 0) = (R, 0)$. Warum ergibt sich bei der Lösung ein Unterschied zwischen anziehenden und abstoßenden Kräften?
(4 Punkte)

Der Zusammenhang zwischen kartesischen Koordinaten (x, y, z) und Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ) ist gegeben durch

$$\vec{r}(r, \vartheta, \varphi) = r \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} .$$

b) Berechnen Sie die Einheitsvektoren $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\vartheta$ und $\vec{e}_\varphi$. (1 Punkt)

c) Zeigen Sie, dass $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\vartheta$ und $\vec{e}_\varphi$ ein lokales Dreibein bilden, d.h. jeweils orthogonal aufeinander stehen. (1 Punkt)

d) Bestimmen Sie die Beschleunigung $\vec{a}(t)$ in Kugelkoordinaten und formulieren Sie damit die Newton'sche Bewegungsgleichung für ein Zentralkraftfeld der Form $\vec{F}(\vec{r}) = f(r)\vec{e}_r$. (4 Bonuspunkte)

Aufgabe 3: dreidimensionaler harmonischer Oszillator

Ein Teilchen der Masse m befindet sich in einem Potential der Form $V(\vec{r}) = \alpha r^2$. Zur Zeit $t = 0$ befindet sich das Teilchen am Ort $\vec{r}(t = 0) = (1, 0, 0)$; die Geschwindigkeit sei $\vec{v}_0 = (0, 1, 1)$.

a) Wie lauten das Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r})$ und die Bewegungsgleichung für das Teilchen in kartesischen Koordinaten?

b) Geben Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung sowie die spezielle Lösung unter den gegebenen Anfangsbedingungen an.

c) Berechnen Sie für die spezielle Lösung die Zeitabhängigkeit der kinetischen und potentiellen Energie. Gilt der Energieerhaltungssatz?

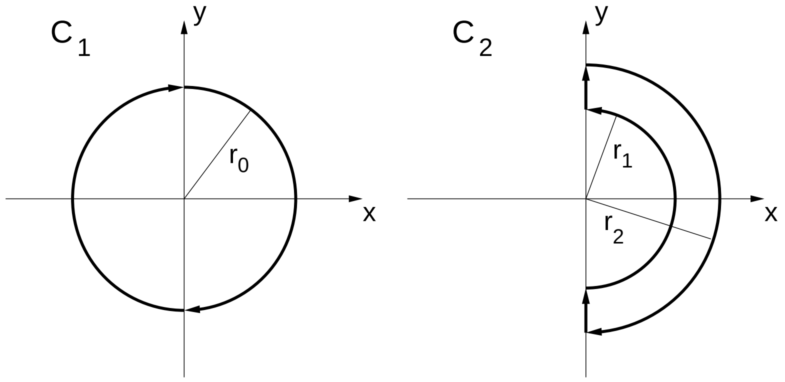
d) Berechnen Sie für die spezielle Lösung die Zeitabhängigkeit des Drehimpulses um den Bezugspunkt $\vec{r}_0 = (0, 0, 0)$.

(6 Punkte)

Aufgabe 4: Kraftfeld, Potential

Gegeben sei ein Kraftfeld der Form $\vec{F}(\vec{r}) = f(r)\vec{e}_\varphi$ (in Zylinderkoordinaten r, φ, z, d.h. $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ist der radiale Abstand von der z-Achse).

a) Für welche Funktionen $f(r)$ ist $\vec{F}(\vec{r})$ im Gebiet $\mathbb{R}\backslash\{\vec{r}|r = 0\}$ wirbelfrei?



b) Berechnen Sie für dieses $\vec{F}(\vec{r})$ die Arbeit ΔA entlang der beiden (geschlossenen) Wege C_1 und C_2 (siehe Abbildung). (Beide Wege verlaufen in der x-y-Ebene, d.h. $z = 0$).

(6 Punkte)