Übungsaufgaben zur Vorlesung

Klassische Theoretische Physik I

Priv.-Doz. Dr. R. Bulla

SS 2013

Blatt 4: Abgabetermin: Dienstag, der 14.05.2013, 10:00

Aufgabe 1: Der Operator $\vec{\nabla}_i$

Die Kraft auf das Teilchen i in einem N-Teilchen-System mit der gesamten potentiellen Energie $V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$ ist gegeben durch

$$\vec{F}_i = -\nabla_i V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) \ .$$

Dabei wird der Gradient bzgl. der Koordinaten des Teilchens i gebildet, d.h. der Operator $\vec{\nabla}_i$ ist gegeben durch

$$\vec{\nabla}_i = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_i} \\ \frac{\partial}{\partial y_i} \\ \frac{\partial}{\partial z_i} \end{pmatrix} \ .$$

Berechnen Sie:

a) $$\vec{\nabla}_i \times \vec{A}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) \ \text{ mit } \ \vec{A}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = \sum_{j=1}^{N} f(|\vec{r}_j|)\vec{r}_j$$

b) $$\vec{\nabla}_i \left[\sum_{j=0}^{N-1} f(|\vec{r}_j| \cdot |\vec{r}_{j+1}|) \right] \quad (i = 1, \dots, N-1)$$

(4 Punkte)

Aufgabe 2: Zeitverbrauch bei eindimensionaler Bewegung

a) In der Vorlesung wurde die Schwingungsperiode einer gebundenen eindimensionalen Bewegung mit konstanter Energie E im Potential $V(x)$ abgeleitet:

$$\tau = 2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}} \, \mathrm{d}x \ ,$$

mit x_1, x_2 den beiden Umkehrpunkten und $E = V(x_1) = V(x_2)$. Das Potential sei gegeben durch $V(x) = k|x|^\alpha$ mit $\alpha > 0$ und $k > 0$.

Führen Sie eine geeignete Substitution auf eine Variable u durch, so dass der Integrand von der (dimensionslosen) Form $1/(\sqrt{1 - |u|^\alpha})$ ist. Lesen Sie am entstandenen Ausdruck ab, für welche Werte von α die Schwingungsperiode *nicht* von der Gesamtenergie abhängt.

b) Betrachten Sie jetzt das repulsive Potential $V(x) = -k|x|^\alpha$ mit $\alpha > 0$ und $k > 0$. Die Energie des Teilchens sei $E = 0$. Zur Zeit $t = 0$ befinde sich das Teilchen am Ort $x = x_0 > 0$. Für welche Werte von α ist die Zeit, die das Teilchen zum Erreichen der Punkte $x = 0$ und $x = \infty$ braucht, endlich?

(5 Punkte)

Aufgabe 3: Phasenraumdarstellung

a) Berechnen Sie für den eindimensionalen harmonischen Oszillator den Flächeninhalt des Gebiets im Phasenraum, welches durch die Menge aller Zustände mit Gesamtenergie $E < E_0$ gegeben ist.

b) Betrachten Sie jetzt den eindimensionalen anharmonischen Oszillator, d.h. ein Teilchen der Masse m im Potential $V(x) = \alpha x^4$. Geben Sie die Schnittpunkte der Trajektorien mit der x- und p-Achse an und skizzieren Sie das Phasenraumporträt.

c) Zeichnen Sie das Phasenraumportrait für die eindimensionale Bewegung eines Teilchens (Masse m) im Schwerefeld, d.h. für $V(x) = mgx$.

d) Skizzieren Sie das Phasenraumporträt für die eindimensionale Bewegung eines Teilchens im Potential $V(x)$ mit

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & : \quad |x| \leq a \;, \\ 0 & : \quad |x| > a \;, \end{cases} \qquad (V_0 > 0) \;.$$

(8 Punkte)

Aufgabe 4: Berechnung von Linienintegralen

Gegeben sei folgendes Kraftfeld

$$\vec{F}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} x + y \\ z - xy \\ z \end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie die von der Kraft $\vec{F}$ entlang der Wege C_i $(i = 1, 2)$ geleistete Arbeit ΔA_i mit

$$\Delta A_i = \int_{\vec{a}, C_i}^{\vec{b}} \vec{F}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{r} \quad , \quad \vec{a} = (0,0,0) \quad , \quad \vec{b} = (1,1,1) \;.$$

Dabei sind die Wege C_i gegeben durch:

$$\begin{aligned} C_1 &: \quad \vec{r}(t) = (t, t, t) \quad , \quad 0 < t < 1 \\ C_2 &: \quad \vec{r}(t) = (t^2, -t + 2t^2, t) \quad , \quad 0 < t < 1 \end{aligned}$$

b) Warum hängen die ΔA_i vom Verlauf des Weges und nicht nur vom Anfangs- und Endpunkt ab?