Übungsaufgaben zur Vorlesung

Klassische Theoretische Physik I

Priv.-Doz. Dr. R. Bulla

SS 2013

Blatt 7: Abgabetermin: Dienstag, der 18.06.2013, 10:00

Aufgabe 1: zwei gekoppelte Oszillatoren mit $m_1 \neq m_2$

Betrachten Sie die eindimensionale harmonische Kette mit $N = 2$ Teilchen, festen Randbedingungen, Federkonstanten $k_i = k$ und $m_1 \neq m_2$. Zeigen Sie, dass für beliebige $m_1 \neq 0$ und $m_2 \neq 0$ der Ansatz

$$\vec{\xi}(t) = \vec{a}e^{\lambda t}$$

auf rein imaginäre Werte für die λ_i $(i = 1, 2)$ führt.

(4 Punkte)

Aufgabe 2: harmonische Kette: Randbedingungen

Die harmonische Kette aus N gekoppelten Teilchen mit Massen $m_i = m$ und Federkonstanten $k_i = k$ kann mit verschiedenen Randbedingungen definiert werden. Diese Randbedingungen zeigen sich nicht nur in den Randtermen der potentiellen Energie, sondern verlangen auch unterschiedliche Strategien zur Lösung des entsprechenden Eigenwertproblems.

a) Wie lautet die Hesse-Matrix $V^{(2)}$ — und damit die Matrix M mit $V^{(2)} = -kM$ — für offene und periodische Randbedingungen?

b) In der Vorlesung wurde gezeigt, dass der Ansatz $a_n = a\sin(qn)$ auf eine Lösung des Eigenwertproblems für den Fall fester Randbedingungen führt. Ist dieser Ansatz auch eine Lösung für den Fall offener Randbedingungen?

c) Betrachten Sie jetzt den Fall periodischer Randbedingungen. Zeigen Sie, dass der Ansatz

$$a_n = ae^{iqn} \ ,$$

das Eigenwertproblem löst. Vergleichen Sie das Spektrum der Eigenwerte mit dem Spektrum für feste Randbedingungen.

(8 Punkte)

Aufgabe 3: Eigenschwingungen der harmonischen Kette

Betrachten Sie jetzt die harmonische Kette mit $N = 3$ Teilchen und festen Randbedingungen. Geben Sie die Eigenwerte, die Eigenfrequenzen und die Eigenvektoren an (als Resultat des Ansatzes $a_n = a\sin(qn)$) und zeigen Sie, dass die Eigenvektoren senkrecht aufeinander stehen.

(3 Punkte)

Aufgabe 4: partielle Differentialgleichungen: Separation der Variablen

Gegeben seien folgende partielle Differentialgleichungen:

$$
\begin{aligned}
&\text{(I)} & \frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial x} + y\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} &= 0\ , \\
&\text{(II)} & \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial z} + \frac{\partial\psi}{\partial z} + z\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} &= 0\ .
\end{aligned}
$$

Führen Sie mit Hilfe eines jeweils geeigneten Ansatzes eine Separation der Variablen durch. Auf welche gewöhnlichen Differentialgleichungen führt diese Separation jeweils?