Übungsaufgaben zur Vorlesung

Klassische Theoretische Physik I

Priv.-Doz. Dr. R. Bulla

SS 2013

Blatt 8: Abgabetermin: Dienstag, der 25.06.2013, 10:00

Aufgabe 1: eindimensionale Wellengleichung

Gegeben sei eine partielle Differentialgleichung der Form

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\xi(x,t) = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\xi(x,t) \ , \tag{1}$$

sowie eine beliebige (mindestens zweimal differenzierbare) Funktion $f(z)$ $(z \in \mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass die Funktionen

$$\xi^{\pm}(x,t) = f(x \pm vt) \ ,$$

Lösungen der Differentialgleichung (1) sind.

(4 Punkte)

Aufgabe 2: zweidimensionale Wellengleichung

Die zweidimensionale Wellengleichung hat die Form

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,y,t) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\psi(x,y,t) = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi(x,y,t) \ . \tag{2}$$

Lösen Sie diese partielle Differentialgleichung für die Funktion $\psi(x,y,t)$ mit Hilfe der Separation der Variablen. Die (x,y)-Werte sind dabei auf den Bereich $0 \leq x \leq L$ und $0 \leq y \leq L$ eingeschränkt, und die Randbedingungen sind gegeben durch

$$\begin{aligned}
\psi(x=0,y,t) &= \psi(x=L,y,t) = 0 \quad , \quad 0 \leq y \leq L \ , t \in \mathbb{R} \ , \\
\psi(x,y=0,t) &= \psi(x,y=L,t) = 0 \quad , \quad 0 \leq x \leq L \ , t \in \mathbb{R} \ .
\end{aligned}$$

Wie lautet die allgemeine Lösung der partiellen Differentialgleichung (1), die diese Randbedingungen erfüllt?

(5 Punkte)

Aufgabe 3: eindimensionale Wellengleichung: Anfangsbedingungen

In der Vorlesung wurde bereits die allgemeine Lösung der Auslenkung $\xi(x,t)$ für die eindimensionale Wellengleichung mit den Randbedingungen $\xi(x=0,t) = \xi(x = L,t) = 0$ angegeben:

$$\xi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\left[a_n \sin\left(\sqrt{\frac{K}{\rho}}\frac{n\pi}{L}t\right) + b_n \cos\left(\sqrt{\frac{K}{\rho}}\frac{n\pi}{L}t\right)\right] .$$

Gesucht ist die Lösung $\xi(x,t)$ für die Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} \xi(x,t=0) &= h(x) = \delta(x - \frac{1}{2}L) \;\; \text{mit } h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \; , \\ \dot{\xi}(x,t=0) &= 0 \; . \end{aligned}$$

a) Zeigen Sie zunächst, dass die Koeffizienten der Fourierreihe von $h(x)$ gegeben sind durch

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L \mathrm{d}x \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) h(x)$$

b) Berechnen Sie damit die b_n für die gegebenen Anfangsbedingungen und geben Sie die volle Zeitabhängigkeit von $\xi(x,t)$ an.

(6 Punkte)

Aufgabe 4: Wiederholung: δ-Funktion

Berechnen Sie:

a)

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x + x^2)\,[\delta(1-x) + \delta(2+x)]\mathrm{d}x$$

b)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^4 \delta(x - n + 1/2)\mathrm{d}x$$

c) Für welche Funktion $a(\varepsilon)$ ergibt der Limes folgender Funktionenfolge eine Darstellung der δ-Funktion:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon(x) = \delta(x) \;\; \text{mit} \;\; f_\varepsilon(x) = \begin{cases} a(\varepsilon) & : \; |x| < \varepsilon \\ 0 & : \; \text{sonst} \; . \end{cases}$$