Übungsaufgaben zur Vorlesung

Klassische Theoretische Physik I

Priv.-Doz. Dr. R. Bulla

SS 2013

Blatt 9: Abgabetermin: Dienstag, der 02.07.2013, 10:00

Aufgabe 1: elektrisches Feld und elektrostatisches Potential

a) Das elektrische Feld einer Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ ist gegeben durch

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int \mathrm{d}^3 r' \rho(\vec{r'}) \frac{\vec{r} - \vec{r'}}{|\vec{r} - \vec{r'}|^3} \ .$$

Zeigen Sie, dass für beliebige (diskrete oder kontinuierliche) Ladungsverteilungen gilt:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}) = \vec{0} \ .$$

b) Das elektrostatische Potential einer Ladungsverteilung ist gegeben durch

$$\phi(\vec{r}) = \int \mathrm{d}^3 r' \frac{\rho(\vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|}$$

Zeigen Sie, dass für dieses $\phi(\vec{r})$ gilt $\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r})$.

(3 Punkte)

Aufgabe 2: Die dreidimensionale δ-Funktion

Berechnen Sie

a)

$$\int \mathrm{d}^3 r \vec{F}(\vec{r}) \delta(\vec{r} - \vec{r_0}) \ , \ \text{mit} \ \ \vec{F}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \sin(x)\cos(y) \\ \sin(x)\sin(y) \\ \cos(z) \end{pmatrix} \ , \ \text{und} \ \ \vec{r_0} = \frac{\pi}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ .$$

b)

$$\int \mathrm{d}^3 r e^{-r^2} \delta(3\vec{r})$$

c)

$$\int_V \mathrm{d}^3 r f(\vec{r}) \sum_{n=0}^{4} \delta(\vec{r} - n\vec{a}) \ , \quad \text{mit} \ \ f(\vec{r}) = x + y + z \ , \ \vec{a} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ ,$$

und V das Volumen einer Kugel mit Radius 2 um den Ursprung.

(5 Punkte)

Aufgabe 3: Darstellungen der dreidimensionalen δ-Funktion

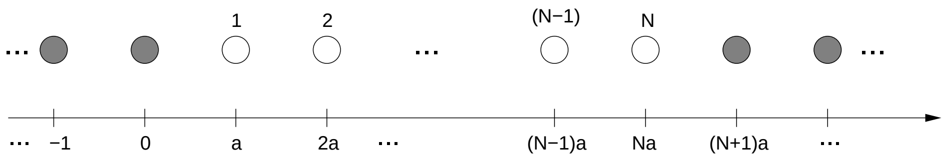
a) Betrachten Sie eine homogen geladene Kugel um den Koordinatenursprung mit Radius R und Gesamtladung Q. Geben Sie die Ladungsdichte $\rho_R(\vec{r})$ an und zeigen Sie, dass
$$\lim_{R\to 0} \rho_R(\vec{r}) = Q\delta(\vec{r}) \ .$$

b) In der Vorlesung wurde folgende Darstellung der δ-Funktion verwendet:
$$\vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r'}}{|\vec{r} - \vec{r'}|^3} = 4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r'}) \ . \tag{1}$$
Zeigen Sie zunächst, dass die linke Seite der Gleichung für alle $\vec{r} \neq \vec{r'}$ verschwindet.

c) Setzen Sie jetzt in Gl. (1) $\vec{r'} = 0$ und integrieren Sie beide Seiten der Gleichung über das Volumen einer Kugel mit Zentrum im Koodinatenursprung und Radius R. Verwenden Sie für die Auswertung des Integrals auf der linken Seite den Gaußschen Satz.

(6 Punkte)

Aufgabe 4: gravitatives N-Körper-Problem in $d = 1$



Betrachten Sie das in der Abbildung dargestellte eindimensional N-Körper-Problem. In der Ruhelage (deren Existenz noch zu zeigen ist) befinden sich die N Körper (jeweils mit Masse m) an den Positionen $x_n^0 = na$ $(n = 1, \ldots, N)$. Zusätzlich befinden sich unbewegliche Körper der Masse m an den Positionen $p_j = ja$ mit $j = N+1, N+2\ldots$ und $j = 0, -1, -2, \ldots$ (andernfalls lässt sich die Ruhelage nicht realisieren). Die Wechselwirkung zwischen je zwei Körpern (egal ob beweglich oder unbeweglich) ist gegeben durch das Gravitationsgesetz, $V = -\alpha/d$ mit d dem Abstand der beiden Körper.

a) Geben Sie den internen und externen Anteil des Potentials und damit die gesamte potentielle Energie $V(\vec{X})$ mit $\vec{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$ an.

b) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen $\partial V(\vec{X})/\partial x_n$, $n = 1, \ldots, N$.

c) Zeigen Sie, dass für $x_i = x_i^0$ tatsächlich eine Ruhelage vorliegt.

(5 Bonuspunkte)