1. Beschreibung von Raumkurven mit krummlinigen Koordinaten

Punkt $\vec{r}$ gegeben durch: $(x,y,z) \longrightarrow$ kartesische Koordinaten

oder $(u,v,w) \longrightarrow$ krummlinige Koordinaten

z.B. Zylinderkoordinaten, Kugelkoordinaten

es existiert eine Funktion $\vec{r} = \vec{r}(u,v,w) = \begin{pmatrix} x(u,v,w) \\ y(u,v,w) \\ z(u,v,w) \end{pmatrix}$

betrachte den Abstand zweier benachbarter Punkte:

$$\vec{r} = \vec{r}(u,v,w) \quad \text{und} \quad \vec{r} + \Delta\vec{r} = \vec{r}(u+\Delta u, v+\Delta v, w+\Delta w)$$

$$\Rightarrow \Delta\vec{r} = \vec{r}(u+\Delta u, v+\Delta v, w+\Delta w) - \vec{r}(u, v+\Delta v, w+\Delta w)$$

$$+ \vec{r}(u, v+\Delta v, w+\Delta w) - \vec{r}(u,v,w+\Delta w)$$

$$+ \vec{r}(u,v,w+\Delta w) - \vec{r}(u,v,w)$$

$$= \frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\Delta v + \frac{\partial\vec{r}}{\partial w}\Delta w = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial\vec{r}}{\partial u_i}\Delta u_i$$

im Limes $\Delta u, \Delta v, \Delta w \to 0$

mit $u_1 = u$, $u_2 = v$, $u_3 = w$

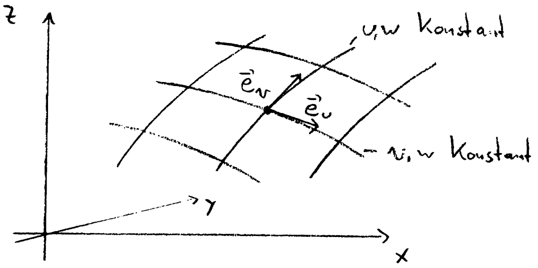
Länge von $\Delta\vec{r}$: $|\Delta\vec{r}|^2 = \Delta\vec{r} \cdot \Delta\vec{r}$

$$= \sum_{ij} \underbrace{\frac{\partial\vec{r}}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial\vec{r}}{\partial u_j}}_{=: g_{ij}} \Delta u_i \Delta u_j$$

g_{ij} sog. Metrik

$|\Delta\vec{r}|$: Linienelement

Einheitsvektoren an krummlinigen Koordinatenlinien



$$\vec{e}_u = \frac{1}{\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\right|} \frac{\partial\vec{r}}{\partial u} \qquad (\vec{e}_v, \vec{e}_w \text{ analog})$$

liegt tangential an der krummlinigen Koordinatenlinie mit v, w konstant

zu beachten:
- die $\vec{e}_{u_i}$ hängen i.A. ab von (u,v,w)
- $\{\vec{e}_{u_i}\}$ i.A. nicht orthogonal

$\longrightarrow$ Krummlinig - orthogonale Koordinaten

definiert durch $\vec{e}_{u_i} \cdot \vec{e}_{u_j} = \delta_{ij}$ für alle $i,j = 1,2,3$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_j} = g_{u_i}^2 \delta_{ij} \qquad \text{mit} \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i} = \underbrace{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i} \right|}_{=: g_{u_i}} \vec{e}_{u_i}$$

und damit $$(\Delta r)^2 = \sum_{i=1}^{3} g_{u_i}^2 (\Delta u_i)^2$$

und $$\Delta \vec{r} = \sum_{i=1}^{3} \vec{e}_{u_i} g_{u_i} \Delta u_i$$

$\longrightarrow$ die $\vec{e}_u, \vec{e}_v, \vec{e}_w$ bilden ein (ortsabhängiges) lokales Dreibein

· Zerlegung eines Vektorfelds $\vec{A}$ nach dem lokalen Dreibein:

$$\vec{A} = A_u \vec{e}_u + A_v \vec{e}_v + A_w \vec{e}_w = \sum_{i=1}^{3} A_{u_i} \vec{e}_{u_i}$$

die Komponenten A_{u_i} erhält man aus:

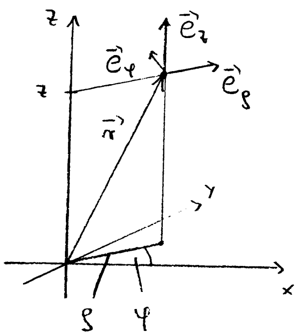
$$\vec{A} \cdot \vec{e}_{u_j} = \sum_{i=1}^{3} A_{u_i} \underbrace{\vec{e}_{u_i} \cdot \vec{e}_{u_j}}_{= \delta_{ij}} = A_{u_j}$$

Beispiel: Zylinderkoordinaten $\vec{r}(\rho, \varphi, z) = \begin{pmatrix} \rho \cos\varphi \\ \rho \sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$

$$\longrightarrow \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \; ; \quad g_\rho = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} \right| = 1 \quad \Rightarrow \quad \vec{e}_\rho = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -\rho \sin\varphi \\ \rho \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \; ; \quad g_\varphi = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \right| = \rho \quad \Rightarrow \quad \vec{e}_\varphi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \; ; \quad g_z = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} \right| = 1 \quad \Rightarrow \quad \vec{e}_z = \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



hier gilt: $$\left. \begin{array}{l} \vec{e}_\rho \cdot \vec{e}_\varphi = 0 \\ \vec{e}_\rho \cdot \vec{e}_z = 0 \\ \vec{e}_\varphi \cdot \vec{e}_z = 0 \end{array} \right\}$$ d.h. Zylinderkoordinaten sind krummlinig-orthog. Koordinaten

Newton'sche Bewegungsgleichung in ebenen Polarkoordinaten

$$\vec{r}(r,\varphi) = r\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix}, \quad \vec{e}_r = \begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\end{pmatrix}$$

$$\Delta\vec{r} = \underbrace{\frac{\partial\vec{r}}{\partial r}}_{=\vec{e}_r}\Delta r + \underbrace{\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}}_{=r\vec{e}_\varphi}\Delta\varphi \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \vec{e}_r\frac{\Delta r}{\Delta t} + r\vec{e}_\varphi\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

$$\Delta t \to 0 : \quad \boxed{\dot{\vec{r}} = \vec{e}_r\dot{r} + r\vec{e}_\varphi\dot{\varphi}}$$

die zweite Ableitung: $\frac{d}{dt}\dot{\vec{r}} = \frac{d}{dt}(\vec{e}_r\dot{r}) + \ldots$

Achtung: $\vec{e}_r$ und $\vec{e}_\varphi$ hängen über $\varphi(t)$ von t ab!

$$\frac{d}{dt}\vec{e}_r = \begin{pmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\end{pmatrix}\dot{\varphi} = \vec{e}_\varphi\dot{\varphi}, \quad \frac{d}{dt}\vec{e}_\varphi = -\vec{e}_r\dot{\varphi}$$

damit folgt schließlich: $\boxed{\ddot{\vec{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\vec{e}_\varphi}$

betrachte Zentralkraft: $\vec{F}(\vec{r}) = f(r)\frac{\vec{r}}{r} = f(r)\vec{e}_r$

$\rightarrow$ Newton'sche Bewegungsgleichung $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r})$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) &= f(r)\\ m(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}) &= 0\end{aligned}}$$

2. gekoppelte Differentialgleichungen

Ausgangspunkt: Dgl. 1. Ordnung der Form $\boxed{\frac{dy}{dx} = f(x,y)}$ f: beliebige Funktion von x und y

z.B.: $f(x,y) = -y$

$\rightarrow \frac{dy}{dx} = -y \rightarrow$ allgemeine Lösung $y(x) = ce^{-x}$

Verallgemeinerung auf N gekoppelte Dgl. 1. Ordnung

$$\boxed{\frac{d\vec{y}}{dx} = \vec{f}(x,\vec{y})} \quad \text{mit} \quad \vec{y} = \begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_N\end{pmatrix}, \quad \vec{f}(x,\vec{y}) = \begin{pmatrix}f_1(x,y_1,\ldots y_N)\\ f_2(x,y_1,\ldots,y_N)\\ \vdots\\ f_N(x,y_1,\ldots,y_N)\end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \quad \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, \vec{y})$$

$$\frac{dy_2}{dx} = f_2(x, \vec{y})$$

$$\vdots$$

$$\frac{dy_N}{dx} = f_N(x, \vec{y})$$

<u>Beispiel:</u> $f_i(x, \vec{y}) = \sum_{j=1}^{N} a_{ij} y_j \quad \rightarrow$ Ansatz: $y_i(x) = b_i e^{\alpha x}$

$$\rightarrow \quad \frac{dy_i}{dx} = \alpha b_i e^{\alpha x}$$

daraus ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

$$\alpha b_1 e^{\alpha x} = a_{11} b_1 e^{\alpha x} + a_{12} b_2 e^{\alpha x} + \dots + a_{1N} b_N e^{\alpha x} \quad \Big| \cdot e^{-\alpha x}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\alpha b_N e^{\alpha x} = a_{N1} b_1 e^{\alpha x} + a_{N2} b_2 e^{\alpha x} + \dots + a_{NN} b_N e^{\alpha x} \quad \Big| \cdot e^{-\alpha x}$$

lässt sich schreiben als $\boxed{A \vec{b} = \alpha \vec{b}}$ mit $(A)_{ij} = a_{ij}$

↳ Eigenwertproblem: $\alpha \rightarrow$ Eigenwerte

$\vec{b} \rightarrow$ Eigenvektoren

<u>jetzt:</u> Dgl. höherer Ordnung

$$\boxed{\frac{d^N y}{dx^N} \equiv y^{(N)} = f(x, y, y', \dots, y^{(N-1)})}$$

lässt sich auf ein System von N gekoppelten Dgl 1. Ordnung zurückführen

<u>Substitution:</u> $u_0 = y, \quad u_1 = y', \quad u_2 = y'', \quad \dots, \quad u_{N-1} = y^{(N-1)}$

$$\Rightarrow \quad \left.\begin{aligned} u_0' &= u_1 \\ u_1' &= u_2 \\ &\vdots \\ u_{N-2}' &= u_{N-1} \\ u_{N-1}' &= f(x, u_0, u_1, \dots, u_{N-1}) \end{aligned}\right\} \quad \boxed{\frac{d\vec{u}}{dx} = \vec{g}(x, \vec{u})}$$

mit
$$g_0(x, \vec{u}) = u_1$$
$$g_1(x, \vec{u}) = u_2$$
$$\vdots$$
$$g_{N-1}(x, \vec{u}) = f(x, \vec{u})$$

3. Diagonalisierung von Matrizen

sei D eine $n\times n$ - Matrix

$\rightarrow$ D ist eine Diagonalmatrix, wenn $(D)_{ij} = d_i \delta_{ij}$, d.h. $D = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}$

Matrixprodukte mit Diagonalmatrizen

sei B eine (beliebige) $n\times n$ - Matrix

$$\Rightarrow \quad DB = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & \\ \vdots & & \ddots & \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 b_{11} & d_1 b_{12} & \cdots & \\ d_2 b_{21} & d_2 b_{22} & \cdots & \\ \vdots & & \ddots & \\ & & & d_n b_{nn} \end{pmatrix}$$

d.h. die i-te Zeile von B wird mit d_i multipliziert

$$\Rightarrow \quad D^2 = DD = \begin{pmatrix} d_1^2 & & & \\ & d_2^2 & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ & & & d_n^2 \end{pmatrix} \quad \text{allgemein:} \quad D^k = \begin{pmatrix} d_1^k & & & \\ & d_2^k & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ & & & d_n^k \end{pmatrix} \quad \text{für } k \in \mathbb{N}$$

Definition: „diagonalisierbar"

eine $n\times n$ - Matrix A heißt diagonalisierbar, wenn es eine invertierbare $n\times n$ - Matrix S gibt, so dass $\boxed{D = S^{-1} A S}$ eine Diagonalmatrix ist.

dabei wird S folgendermaßen bestimmt:

sei $\{\vec{b}_i\}$ ein vollständiger Satz von Eigenvektoren zu A,

d.h. $A\vec{b}_i = \lambda_i \vec{b}_i$ mit λ_i Eigenwert zum Eigenvektor $\vec{b}_i$

$$\Rightarrow \quad \boxed{S = (\vec{b}_1\ \vec{b}_2\ \ldots\ \vec{b}_n)}$$ d.h. die $\vec{b}_i$ bilden die Spalten der Matrix S

$\rightarrow$ Berechnung des Matrixprodukts $S^{-1} A S$

zunächst: $(AS)_{ij} = \sum_k A_{ik} S_{kj}$ dabei gilt $S_{kj} = (\vec{b}_j)_k$

$\rightarrow$ die k-te Komponente von $\vec{b}_j$

$= \sum_k A_{ik} (\vec{b}_j)_k$

$\hat{=}$ der i-ten Komponente des Vektors $A\vec{b}_j$: $(A\vec{b}_j)_i = \sum_k A_{ik} (\vec{b}_j)_k$

$$\Rightarrow \quad (AS)_{ij} = (A\vec{b}_j)_i = (\lambda_j \vec{b}_j)_i = \lambda_j (\vec{b}_j)_i$$

jetzt: $$[S^{-1}(AS)]_{mn} = \sum_l (S^{-1})_{ml} \underbrace{(AS)_{ln}}_{= \lambda_n (\vec{b}_n)_l = \lambda_n S_{ln}} =$$

$$= \lambda_n \sum_l (S^{-1})_{ml} S_{ln} = \lambda_n (\underbrace{S^{-1}S}_{=\mathbb{1}})_{mn} = \lambda_n \delta_{mn}$$

$$\Rightarrow \quad S^{-1} A S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} \longrightarrow$$ Diagonalmatrix mit den Eigenweten λ_i in der Diagonalen

<u>eine Anwendung:</u>

sei A eine diagonalisiebare $n \times n$ - Matrix; gesucht ist A^k mit $k \in \mathbb{N}$

betrachte zunächst $$M = S^{-1} A^k S$$

$$= S^{-1} \cdot A \underset{\mathbb{1}}{\hat{\cdot}} A \underset{\mathbb{1}}{\hat{\cdot}} A \underset{\mathbb{1}}{\hat{\cdot}} \dots \underset{\mathbb{1}}{\hat{\cdot}} A \cdot S \qquad \text{mit } \mathbb{1} = S S^{-1}$$

$$= \underbrace{S^{-1} A S}_{=D} \cdot \underbrace{S^{-1} A S}_{=D} \cdot \dots \cdot \underbrace{S^{-1} A S}_{=D} = D^k$$

$$\longrightarrow \quad S^{-1} A^k S = D^k \quad \big| \; S \cdot \dots \cdot S^{-1} \qquad \Rightarrow \quad \boxed{A^k = S D^k S^{-1}}$$

d.h. anstelle eines k-fachen Matrixprodukts

$\longrightarrow$ Bestimmung der Eigenwete und Eigenvektoren

$+$ 3-faches Matrixprodukt

<u>Def.:</u> eine quadratische Matrix A heißt symmetrisch, wenn

$$A^t = A \qquad (A^t: \text{transponierte Matrix}), \text{ d.h. } (A)_{ij} = (A)_{ji}$$

<u>es gilt:</u> Eigenvektoren symmetrischer Matrizen zu verschiedenen Eigenwerten stehen senkrecht aufeinander.

<u>Beweis:</u> sei $A\vec{b}_1 = \lambda_1 \vec{b}_1$

$$A\vec{b}_2 = \lambda_2 \vec{b}_2 \qquad \text{mit } A^t = A \quad \text{und } \lambda_1 \neq \lambda_2$$

betrachte zunächst $A\vec{b}_1$ $\longrightarrow$ die i-te Komponente : $(A\vec{b}_1)_i = \sum_k A_{ik} (\vec{b}_1)_k$

$\longrightarrow$ bilde das Skalarprodukt $(A\vec{b}_1)\cdot\vec{b}_2 \overset{(*)}{=} \sum_i \sum_k A_{ik} (\vec{b}_1)_k (\vec{b}_2)_i =$

vertausche die Summationsindizes $\longrightarrow$ $= \sum_k \sum_i \underbrace{A_{ki}}_{= A_{ik}\text{, da } A \text{ symmetrisch}} (\vec{b}_1)_i (\vec{b}_2)_k = \ldots$

$\ldots = \sum_i \sum_k A_{ik} (\vec{b}_2)_k (\vec{b}_1)_i$

$= (A\vec{b}_2)\cdot\vec{b}_1$ wegen Analogie zu (*)

$\Longrightarrow \underbrace{(A\vec{b}_1)}_{=\lambda_1\vec{b}_1}\cdot\vec{b}_2 = \underbrace{(A\vec{b}_2)}_{=\lambda_2\vec{b}_2}\cdot\vec{b}_1$; $\underbrace{(\lambda_1-\lambda_2)}_{\neq 0}\vec{b}_1\cdot\vec{b}_2 = 0$ $\Longrightarrow \vec{b}_1\cdot\vec{b}_2 = 0$ ✓

bei k-fach entarteten Eigenwerten,

also $\lambda_{i_1} = \lambda_{i_2} = \ldots = \lambda_{i_k}$ $\longrightarrow$ wähle orthonormierte Eigenvektoren im entsprechenden Unterraum

für die Transformationsmatrix S folgt dann :

$S = (\vec{b}_1\,\vec{b}_2\,\ldots\,\vec{b}_n)$ wie zuvor, jedoch mit $\vec{b}_i\cdot\vec{b}_j = \delta_{ij}$

bilde $S^t S = \begin{pmatrix}\vec{b}_1\\ \vec{b}_2\\ \vdots\\ \vec{b}_n\end{pmatrix} (\vec{b}_1\,\vec{b}_2\,\ldots\,\vec{b}_n) = \begin{pmatrix}\vec{b}_1\cdot\vec{b}_1 & \vec{b}_1\cdot\vec{b}_2 & \ldots \\ \vec{b}_2\cdot\vec{b}_1 & \ddots & \\ \vdots & & \vec{b}_n\cdot\vec{b}_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & 0 \\ 0 & \ddots & \\ & & 1\end{pmatrix} = \mathbb{1}$

$\Longrightarrow \boxed{S^t = S^{-1}}$ die Transformationsmatrix einer symmetrischen Matrix ist orthogonal

und es gilt : $D = S^t A S$ ist eine Diagonalmatrix

4. mehrdimensionale Taylor-Entwicklung

gegeben sei eine Funktion f von N Variablen $x_1, \dots, x_N$: $f(x_1, \dots, x_N)$

die Taylor-Entwicklung von f um den Punkt $(0,0,..0)$.

$$f(x_1, x_2, \dots x_N) = f(0,\dots,0) + \sum_{i=1}^{N} a_i x_i + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} b_{ij} x_i x_j$$
$$+ \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} c_{ijk} x_i x_j x_k + \dots$$

Bestimmung der Koeffizienten $a_i, b_{ij}, c_{ijk}, \dots$

$$\longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x_n} = a_n + \sum_i \sum_j b_{ij} \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_n}(x_i x_j)}_{= \underbrace{\frac{\partial x_i}{\partial x_n}}_{=\delta_{in}} x_j + x_i \underbrace{\frac{\partial x_j}{\partial x_n}}_{\delta_{jn}}} + \dots = a_n + \sum_{ij} b_{ij} (x_j \delta_{in} + x_i \delta_{jn}) + \dots$$

$$\Longrightarrow \boxed{\left.\frac{\partial f}{\partial x_n}\right|_{(0,..0)} = a_n}$$

$$\longrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_m} = \sum_{ij} b_{ij} (\delta_{jm}\delta_{in} + \delta_{im}\delta_{jn}) + \dots = b_{nm} + b_{mn} + \dots$$

wähle $b_{nm} = b_{mn}$ (ergeben dieselben Terme in der Taylor-Reihe)

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_m}\right|_{(0,\dots,0)} = b_{nm}}$$

für die Taylor-Reihe folgt damit:

$$f(x_1, x_2, .. x_N) = f(0,\dots,0) + \sum_{i=1}^{N} \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{(0,\dots,0)} x_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right|_{(0,..0)} x_i x_j$$
$$+ \dots$$

analog für Entwicklung um $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_N^{(0)})$ $\longrightarrow$ ersetze x_i durch $(x_i - x_i^{(0)})$

5. partielle Differentialgleichungen

Beispiel: $$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}$$ gesucht: $u(x,y,t)$ für $0 \le x \le L$, $0 \le y \le L$

Ansatz: $u(x,y,t) = X(x)\,Y(y)\,T(t)$

$\longrightarrow \quad X(x)\,Y(y)\,T'(t) = X''(x)\,Y(y)\,T(t) + X(x)\,Y''(y)\,T(t) \quad \Big| \cdot \frac{1}{X(x)Y(y)T(t)}$

$$\underbrace{\frac{T'(t)}{T(t)}}_{=a(t)} = \underbrace{\frac{X''(x)}{X(x)}}_{=b(x)} + \underbrace{\frac{Y''(y)}{Y(y)}}_{=c(y)}$$ $\longleftarrow$ Separation der Variablen

$\longrightarrow \quad a(t) = b(x) + c(y)$ alle drei Funktionen = const.

d.h. $a = b + c$

$\Rightarrow$ drei gewöhnliche Dgl.:

(I) $X''(x) = -k_x^2\, X(x)$ $\quad \rightarrow$ setze $b = -k_x^2$

(II) $Y''(y) = -k_y^2\, Y(y)$ $\quad \rightarrow$ setze $c = -k_y^2$

$\Rightarrow \quad a = -(k_x^2 + k_y^2)$

(III) $T'(t) = -(k_x^2 + k_y^2)\, T(t)$

Lösung von Dgl. (I) und (II) mit den Randbedingungen

$$u(x=0,y,t) = u(x=L,y,t) = u(x,y=0,t) = u(x,y=L,t) = 0$$

$\rightarrow$ geeigneter Ansatz für $X(x)$ und $Y(y)$:

$X(x) = \sin(k_x x)$ $\quad \rightarrow \quad X(L) = 0$ ergibt: $k_x = \frac{\pi}{L} n_x\,, \quad n_x = 1,2,\dots\infty$

$Y(y) = \sin(k_y y)$ $\quad \rightarrow \quad Y(L) = 0$ ergibt: $k_y = \frac{\pi}{L} n_y\,, \quad n_y = 1,2,\dots\infty$

Ansatz für $T(t)$:

$T(t) = a\, e^{\lambda t}$ $\quad \rightarrow$ Einsetzen in (III) ergibt $\quad \lambda = -(k_x^2 + k_y^2) = -\frac{\pi^2}{L^2}(n_x^2 + n_y^2)$

$\Rightarrow$ allgemeine Lösung für $u(x,y,t)$:

$$u(x,y,t) = \sum_{n_x=1}^{\infty} \sum_{n_y=1}^{\infty} \underbrace{a_{n_x n_y}}_{\text{bestimmt durch die Anfangsbedingungen}} \sin\left(\frac{\pi}{L} n_x x\right) \sin\left(\frac{\pi}{L} n_y y\right) e^{-\frac{\pi^2}{L^2}(n_x^2 + n_y^2)t}$$

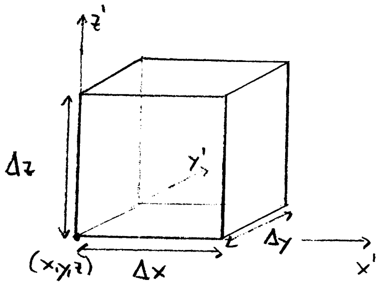
6. die Integralsätze

$\rightarrow$ Gauß'sche Satz, Stokes'scher Satz: Verknüpfung von Linien-, Flächen- und Volumenintegralen

a, Gauß'sche Satz

gegeben: Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r})$, „kleines" Volumen ΔV mit geschlossener Oberfläche ΔF

wähle ΔV als Quader:



$\rightarrow$ berechne das Flächenintegral $\oint_{\Delta F} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{f}$ = Summe aus sechs Teilflächen

Vorderseite: $$\int_1 \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{f} = \int_x^{x+\Delta x} \int_z^{z+\Delta z} \vec{A}(x',y,z') \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -dx'dz' \\ 0 \end{pmatrix} = -\int_x^{x+\Delta x} dx' \int_z^{z+\Delta z} dz' \, A_y(x',y,z')$$

Hinterseite: $$\int_2 \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{f} = +\int_x^{x+\Delta x} \int_z^{z+\Delta z} A_y(x',y+\Delta y,z')$$

bilde $$\lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \left[\int_1 \dots + \int_2 \dots \right] =$$

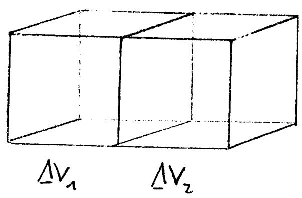
$$= \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \lim_{\Delta z \to 0} \frac{1}{\Delta x \Delta z} \int_x^{x+\Delta x} dx' \int_z^{z+\Delta z} dz' \underbrace{\lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{\Delta y} \left[A_y(x',y+\Delta y,z') - A_y(x',y,z') \right]}_{= \frac{\partial A_y}{\partial y}(x',y,z')}}_{\rightarrow \; \Delta x \, \Delta z \, \frac{\partial A_y}{\partial y}(x,y,z)} =$$

$$= \frac{\partial A_y}{\partial y} \; ;$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_{\Delta F} \vec{A} \cdot d\vec{f} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}}$$

$\rightarrow$ Integraldarstellung der Divergenz

jetzt: Zusammensetzen von $\Delta V_1 + \Delta V_2 + \dots$



Gesamtvolumen $\Delta V_{12} = \Delta V_1 + \Delta V_2$,

Oberfläche ΔF_{12}, Grenzfläche F_G

$$\rightarrow \oint_{\Delta F_{12}} \vec{A}\cdot d\vec{f} = \oint_{\Delta F_1} \vec{A}\cdot d\vec{f} + \oint_{\Delta F_2} \vec{A}\cdot d\vec{f} = \ldots$$

denn: die Terme $\int_{F_6} \vec{A}\cdot d\vec{f}$ in diesen beiden Flächenintegralen heben sich auf

$$\ldots \cong \sum_{i=1}^{2} \Delta V_i \, (\vec{\nabla}\cdot\vec{A})\Big|_{\vec{r}_i}$$

jetzt: $V = \sum_{i=1}^{N} \Delta V_i \quad \longrightarrow \quad \oint_{F_V} \vec{A}\cdot d\vec{f} \cong \sum_{i=1}^{N} \Delta V_i \, (\vec{\nabla}\cdot\vec{A})\Big|_{\vec{r}_i}$

im Limes $N\to\infty$ $(\Delta V_i \to 0)$ folgt schließlich der Gauß'sche Satz:

$$\boxed{\oint_{F_V} \vec{A}\cdot d\vec{f} = \int_V dV \; \vec{\nabla}\cdot\vec{A}}$$

<u>Beispiele:</u>

- $\vec{A}(\vec{r}) = \vec{r} \quad \rightarrow \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 3$

  $\Rightarrow \oint_{F_V} \vec{r}\cdot d\vec{f} = 3\int_V dV = 3V$ unabhängig von der Form des Volumens

- $\vec{A}(\vec{r}) = \vec{\nabla}\times\vec{B}(\vec{r})$

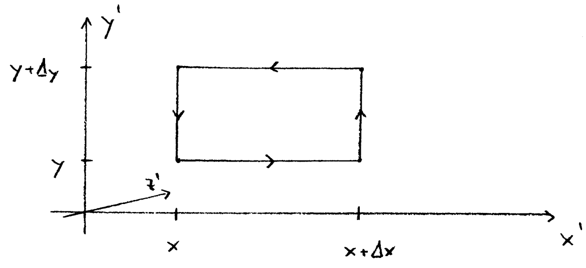
  $\Rightarrow \oint_{F_V} \vec{A}(\vec{r})\cdot d\vec{f} = \int_V dV \; \underbrace{\vec{\nabla}\cdot[\vec{\nabla}\times\vec{B}(\vec{r})]}_{=0} = 0$

  d.h.: der Fluß eines Wirbelfelds durch eine geschlossene Fläche verschwindet

b) Stokes'scher Satz

gegeben: Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r})$, „kleine" Fläche ΔF mit geschlossener Randlinie $C_{\Delta F}$

wähle ΔF als Rechteck:



$\longrightarrow$ berechne das Linienintegral $\oint_{C_{\Delta F}} \vec{A}\cdot d\vec{r}$ = Summe aus vier Linienintegralen

$$\oint_{C_{\Delta F}} \vec{A}\cdot d\vec{r} = \int_x^{x+\Delta x} A_x(x',y,z)\,dx' - \int_x^{x+\Delta x} A_x(x',y+\Delta y,z)\,dx'$$
$$+ \int_y^{y+\Delta y} A_y(x+\Delta x,y',z)\,dy' - \int_y^{y+\Delta y} A_y(x,y',z)\,dy'$$

bilde: $$\lim_{\Delta F\to 0}\frac{1}{\Delta F}\oint_{C_{\Delta F}}\vec{A}\cdot d\vec{r} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\underbrace{\int_x^{x+\Delta x} dx'\,\underbrace{\lim_{\Delta y\to 0}\frac{1}{\Delta y}\left[A_x(x',y,z) - A_x(x',y+\Delta y,z)\right]}_{= -\frac{\partial A_x}{\partial y}(x',y,z)}}_{\to\; -\Delta x\,\frac{\partial A_x}{\partial y}(x,y,z)}$$

$$+ \;(\text{Terme mit } A_y) =$$

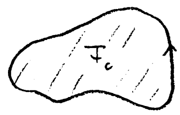
$$= \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = (\vec{\nabla}\times\vec{A})_z$$ $\longrightarrow$ führt auf Integraldarstellung de Rotation

$$\longrightarrow \oint_{C_{\Delta F}}\vec{A}\cdot d\vec{r} \cong \Delta F\,(\vec{\nabla}\times\vec{A})_z \overset{!}{=} \Delta\vec{F}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A})$$

Zusammensetzen von $\Delta F_1 + \Delta F_2 + \ldots$ führt auf $\oint_C \vec{A}\cdot d\vec{r} = \sum_{i=1}^{N}\Delta\vec{F}_i\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A})\Big|_{\vec{r}=\vec{r}_i}$

im Limes $N\to\infty$ $(\Delta F_i\to 0)$ folgt schließlich der

Stokes'sche Satz $$\boxed{\oint_C \vec{A}\cdot d\vec{r} = \int_{F_c}\operatorname{rot}\vec{A}\cdot d\vec{F}}$$



Weg C

c) partielle Integration

sei $f(\vec{r})$ ein skalares Feld, $\vec{A}(\vec{r})$ ein Vektorfeld

$$\longrightarrow \quad \vec{\nabla}\cdot\left(f(\vec{r})\,\vec{A}(\vec{r})\right) = f\,\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \vec{A}\cdot\vec{\nabla}f$$ (siehe Vorl. MM).

auf beiden Seiten: $\int_V dV \ldots$

$$\underbrace{\int dV\,\vec{\nabla}\cdot(f\vec{A})}_{=\oint_{F_V} f\vec{A}\cdot d\vec{f}} = \int dV\left[f\,\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \vec{A}\cdot\vec{\nabla}f\right]$$

speziell für $f = \phi$, $\vec{A} = \vec{\nabla}\phi$

$$\longrightarrow \oint_{F_V}\phi\,\vec{\nabla}\phi\cdot d\vec{f} = \int dV\left[\phi\,\underbrace{\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\phi)}_{=\Delta\phi} + \underbrace{\vec{\nabla}\phi\cdot\vec{\nabla}\phi}_{=|\vec{\nabla}\phi|^2}\right]$$

Abschätzung des Oberflächenintegrals für :

$$\Phi \sim \frac{1}{r} \quad \longrightarrow \quad |\vec{\nabla}\Phi| \sim \frac{1}{r^2} \quad \Rightarrow \quad \Phi\,|\vec{\nabla}\Phi| \sim \frac{1}{r^3}$$

F_V : Oberfläche einer Kugel mit Radius R

$$\Rightarrow \oint_{F_V} \Phi \vec{\nabla}\Phi \cdot \vec{df} \sim \frac{1}{R^3} \cdot R^2 = \frac{1}{R} \qquad \Rightarrow \lim_{R\to\infty} \oint_{F_V} \Phi \vec{\nabla}\Phi \cdot \vec{df} = 0$$

in diesem Fall gilt also :

$$\boxed{\int dV\, \Phi\, \Delta\Phi = -\int dV\, |\vec{\nabla}\Phi|^2}$$