Übungsaufgaben zur Vorlesung

Klassische Theoretische Physik I

Priv.-Doz. Dr. R. Bulla

SS 2010

Blatt 10: Abgabetermin: Dienstag, der 13.07.2010, 10:00 (vor Beginn der Vorlesung)

Aufgabe 1: Stokes'scher Satz

Gegeben sei ein Vektorfeld

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{2}\vec{b} \times \vec{r} \quad \text{mit} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \ .$$

Berechnen Sie das Linienintegral $\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{r}$ über die Kreislinie in der x-z-Ebene mit Zentrum der Kreisfläche bei $(0, 0, 0)$ und Radius R, und zwar

a) durch explizite Berechnung des Linienintegrals und

b) unter Verwendung des Stokes'schen Satzes durch die Berechnung des entsprechenden Flächenintegrals.

(4 Punkte)

Aufgabe 2: Feld einer homogen geladenen Kugel

In der Vorlesung wurde das elektrische Feld einer homogen geladenen Kugel mit Hilfe des Gaußschen Satzes berechnet. Zeigen Sie, dass man das elektrische Feld auch über die Lösung der Poisson-Gleichung

$$\Delta\phi(\vec{r}) = -4\pi\rho(\vec{r}) \ ,$$

erhält.

Hinweis: Die Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$ und das elektrostatische Potential $\phi(\vec{r})$ hängen nur von $r = |\vec{r}|$ ab. Deswegen lässt sich die Rechnung vereinfachen, indem man den Laplace-Operator in Kugelkoordinaten verwendet:

$$\Delta\phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \ldots \ ,$$

dabei steht ... für Terme, die partielle Ableitungen nach ϑ und φ enthalten.

(5 Punkte)

Aufgabe 3: Gaußscher Satz

Gegeben sei das Vektorfeld

$$\vec{A}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} r\sin\vartheta \\ r\sin\vartheta \\ r\cos\vartheta \end{pmatrix}$$

(r, ϑ: Kugelkoordinaten). Zu berechnen ist das Flächenintegral

$$\oint_{F_V} \vec{A}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{f}$$

mit F_V der Oberfläche einer Kugel um den Ursprung mit Radius R_0.

a) Berechnen Sie das Integral über die Oberfläche durch Parametrisierung des Flächenintegrals in Kugelkoordinaten:

$$\oint_{F_V} \vec{A}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{f} = R_0 \int_0^{\pi} \sin\vartheta \mathrm{d}\vartheta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \, \vec{A}(\vec{r}(\vartheta,\varphi)) \cdot \vec{r}(\vartheta,\varphi) \ ,$$

mit

$$\vec{r}(\vartheta,\varphi) = R_0 \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} \ .$$

b) Berechnung Sie die Divergenz des Vektorfelds $\vec{A}(\vec{r})$. Hinweis: Die Berechnung von $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ in kartesischen Koordinaten, also mit

$$\frac{\partial}{\partial x} A_x + \frac{\partial}{\partial y} A_y + \frac{\partial}{\partial z} A_z \ ,$$

ist relativ aufwändig. Sie können alternativ auch die Darstellung der Divergenz in Kugelkoordinaten verwenden:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r\sin\vartheta} \left(\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\sin\vartheta A_\vartheta) + \frac{\partial}{\partial\varphi} A_\varphi \right) \ ,$$

wobei Sie aber zunächst das Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r})$ nach dem lokalen Dreibein der Kugelkoordinaten zerlegen müssen.

c) Verwenden Sie nun den Gaußschen Satz und berechnen Sie das sich daraus ergebende Volumenintegral. Führen Sie auch diese Integration in Kugelkoordinaten durch.

(6 Punkte)