Übungsaufgaben zur Vorlesung

# Klassische Theoretische Physik I

Priv.-Doz. Dr. R. Bulla

SS 2010

**Blatt 3**: Abgabetermin: Dienstag, der 04.05.2010, 10:00 (vor Beginn der Vorlesung)

## Aufgabe 1: Drehimpuls

a) Die Bahn eines Körpers sei gegeben durch $\vec{r}(t)$, der Drehimpuls $\vec{l}(t)$ werde relativ zum Bezugspunkt $\vec{r}_0 = \vec{0}$ bestimmt. Zeigen Sie, dass die vom Vektor $\vec{r}$ überstrichene Fläche $A$ mit der Zeit wie

$$\Delta A = \frac{|\vec{l}(t)|}{2m} \Delta t$$

zunimmt.

b) Zeigen Sie, dass der Gesamtdrehimpuls $\vec{L}$ eines $N$-Teilchen-Systems für $\vec{F}_{\mathrm{e}} = \vec{0}$ (keine äußeren Kräfte) eine Erhaltungsgröße ist.

c) Betrachten Sie ein System mit zwei Teilchen (Koordinaten $\vec{r}_1(t)$, $\vec{r}_2(t)$; Massen $m_1$, $m_2$). Schwerpunkts- und Relativkoordinate dieses Systems sind gegeben durch

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{2} m_i \vec{r}_i \quad , \quad \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \ .$$

Geben Sie den Gesamtdrehimpuls $\vec{L}$ dieses Systems in den Koordinaten $\vec{R}$ und $\vec{r}$ (und deren Ableitungen) an.

(6 Punkte)

## Aufgabe 2: Energieerhaltung für $N$-Teilchen-System

Die Gesamtenergie eines $N$-Teilchen-Systems $E$ ist die Summe aus der gesamten kinetischen Energie $T$ und der gesamten potentiellen Energie $V$, wobei sich $V$ aus inneren und äußeren Anteilen zusammensetzt. Zeigen Sie, dass $E$ eine Erhaltungsgröße ist. Hinweis: Der Beweis wurde in der Vorlesung nur skizziert, gefragt ist hier der vollständige Beweis.

(4 Punkte)

**Aufgabe 3: Berechnung von Linienintegralen**

Gegeben sei folgendes Kraftfeld

$$\vec{F}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} x+y \\ z-xy \\ z \end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie die von der Kraft $\vec{F}$ entlang der Wege $C_i$ ($i = 1, 2, 3$) geleistete Arbeit $\Delta A_i$ mit

$$\Delta A_i = \int_{\vec{a}, C_i}^{\vec{b}} \vec{F}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{r} \quad , \quad \vec{a} = (0,0,0) \quad , \quad \vec{b} = (1,1,1) \; .$$

Dabei sind die Wege $C_i$ gegeben durch:

$$\begin{aligned} C_1 \quad &: \quad \vec{r}(t) = (t,t,t) \quad , \quad 0 < t < 1 \\ C_2 \quad &: \quad \vec{r}(t) = (t^2, -t+2t^2, t) \quad , \quad 0 < t < 1 \\ C_3 \quad &: \quad \vec{r}(t) = (t, t, a + b\exp(t)) \quad , \quad 0 < t < 1 \end{aligned}$$

Hinweis: für den Weg $C_3$ sind zunächst die Konstanten $a$ und $b$ zu bestimmen.

b) Warum hängen die $\Delta A_i$ vom Verlauf des Weges und nicht nur vom Anfangs- und Endpunkt ab?

(7 Punkte)

**Aufgabe 4: dreidimensionaler harmonischer Oszillator**

Ein Teilchen der Masse $m$ befindet sich in einem Potential der Form $V(\vec{r}) = \alpha r^2$. Zur Zeit $t = 0$ befindet sich das Teilchen am Ort $\vec{r}(t = 0) = (1,0,0)$; die Geschwindigkeit sei $\vec{v}_0 = (0,1,1)$.

a) Wie lauten das Kraftfeld $F(\vec{r})$ und die Bewegungsgleichung für das Teilchen in kartesischen Koordinaten?

b) Geben Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung sowie die spezielle Lösung unter den gegebenen Anfangsbedingungen an.

c) Berechnen Sie für die spezielle Lösung die Zeitabhängigkeit der kinetischen und potentiellen Energie. Gilt der Energieerhaltungssatz?

d) Berechnen Sie für die spezielle Lösung die Zeitabhängigkeit des Drehimpulses um den Bezugspunkt $\vec{r}_0 = (0,0,0)$.

(6 Punkte)