Übungsaufgaben zur Vorlesung

Klassische Theoretische Physik I

Priv.-Doz. Dr. R. Bulla

SS 2010

Blatt 5: Abgabetermin: Dienstag, der 08.06.2010, 10:00 (vor Beginn der Vorlesung)

Aufgabe 1: Keplerproblem: Parabeln und Ellipsen

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die Winkelabhängigkeit der Radialkomponente der Relativkoordinate des Keplerproblems gegeben ist durch

$$r(\varphi) = \frac{k}{1 + \varepsilon \cos(\varphi)} \ .$$

Zeigen Sie, dass diese Gleichung in kartesischen Koordinaten den bekannten Gleichungen für eine Parabel ($\varepsilon = 1$) und einer Ellipse ($0 < \varepsilon < 1$) entspricht.

(5 Punkte)

Aufgabe 2: Der Operator $\vec{\nabla}_i$

Die Kraft auf das Teilchen i in einem N-Teilchen-System mit der gesamten potentiellen Energie $V(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N)$ ist gegeben durch

$$\vec{F}_i = -\nabla_i V(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N) \ .$$

Dabei wird der Gradient bzgl. der Koordinaten des Teilchens i gebildet, d.h. der Operator $\vec{\nabla}_i$ ist gegeben durch

$$\vec{\nabla}_i = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_i} \\ \frac{\partial}{\partial y_i} \\ \frac{\partial}{\partial z_i} \end{pmatrix} \ .$$

Berechnen Sie:

a)

$$\vec{\nabla}_i \times \vec{A}(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N) \quad \text{mit} \quad \vec{A}(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N) = \sum_{j=1}^{N} f(|\vec{r}_j|)\vec{r}_j$$

b)

$$\vec{\nabla}_i \left[\sum_{j=0}^{N-1} f(|\vec{r}_j| \cdot |\vec{r}_{j+1}|) \right] \quad (i = 1, \ldots, N-1)$$

(4 Punkte)

Aufgabe 3: Zweikörperproblem mit Zentralkraft

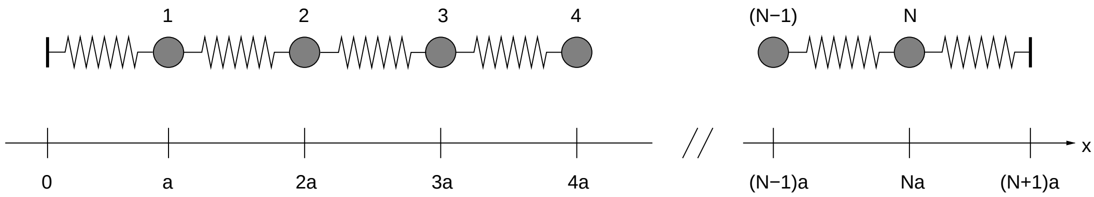
Das Zentralpotential eines Zweikörperproblems sei gegeben durch

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^2}$$

Berechnen Sie — analog zur Vorlesung — die Funktion $r(\varphi)$ und leiten Sie daraus die Winkelverschiebung $\Delta\varphi$ für den Fall einer gebundenen Bewegung ab.

(5 Punkte)

Aufgabe 4: Gekoppelte Oszillatoren



Betrachten Sie das in der Abbildung dargestellte eindimensionale System aus N Körpern (jeweils mit Masse m), die über Federn (jeweils mit Federkonstante k) untereinander und mit den Aufhängepunkten bei $x = 0$ und $x = (N+1)a$ verbunden sind. Die Ruhelagen der Körper sind gegeben durch $x_{n,0} = na$ $(n = 1, \ldots, N)$ und die Auslenkungen aus den Ruhelagen durch $\xi_n = x_n - x_{n,0}$.

a) Wie lautet die gesamte potentielle Energie des Systems?

b) Geben Sie die Bewegungsgleichungen für die Koordinaten ξ_n an und transformieren Sie diese mit Hilfe eines geeigneten Ansatzes auf ein Eigenwertproblem.

(5 Punkte)