Übungsaufgaben zur Vorlesung

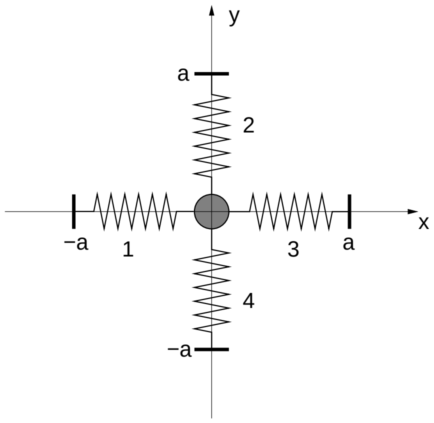
Klassische Theoretische Physik I

Priv.-Doz. Dr. R. Bulla

SS 2010

Blatt 7: Abgabetermin: Dienstag, der 22.06.2010, 10:00 (vor Beginn der Vorlesung)

Aufgabe 1: zweidimensionaler Oszillator



Betrachten Sie das in der Abbildung dargestellte zweidimensionale System aus einem Teilchen der Masse m und vier Federn jeweils mit Federkonstante k. Die Aufhängepunkte der Federn sind gegeben durch $\vec{a}_i = (\pm a, 0)$ und $(0, \pm a)$ $(i = 1, \ldots, 4)$, der Ort des Teilchens ist $\vec{r} = (x, y)$, mit $\vec{r} = (0, 0)$ einer Ruhelage des Systems. Die Beiträge der einzelnen Federn zur potentiellen Energie sind

$$V_i(x, y) = \frac{1}{2} k (l_i(x, y) - a)^2 \ ,$$

mit $l_i(x, y)$ der Länge der Feder i.

a) Geben Sie die gesamte potentielle Energie V des Systems als Funktion von x und y an.

b) Berechnen Sie die Hesse-Matrix $V^{(2)}$ und geben Sie die Taylor-Entwicklung von $V(x, y)$ bis zur quadratischen Ordnung an.

(5 Punkte)

Aufgabe 2: harmonische Kette: Randbedingungen

Die harmonische Kette aus N gekoppelten Teilchen der Masse m kann mit verschiedenen Randbedingungen definiert werden. Diese Randbedingungen zeigen sich nicht nur in den Randtermen der potentiellen Energie, sondern verlangen auch unterschiedliche Strategien zur Lösung des entsprechenden Eigenwertproblems.

a) Wie lautet die Hesse-Matrix $V^{(2)}$ — und damit die Matrix M mit $V^{(2)} = -kM$ — für offene und periodische Randbedingungen?

b) In der Vorlesung wurde gezeigt, dass der Ansatz $a_n = a\sin(qn)$ auf eine Lösung des Eigenwertproblems für den Fall fester Randbedingungen führt. Ist dieser Ansatz auch eine Lösung für den Fall offener Randbedingungen?

c) Betrachen sie jetzt den Fall periodischer Randbedingungen. Zeigen Sie, dass der Ansatz

$$a_n = ae^{iqn} ,$$

das Eigenwertproblem löst. Vergleichen Sie das Spektrum der Eigenwerte mit dem Spektrum für feste Randbedingungen.

(8 Punkte)

Aufgabe 3: Eigenschwingungen der harmonischen Kette

Betrachten Sie jetzt die harmonische Kette mit $N = 3$ Teilchen und festen Randbedingungen. Geben Sie die Eigenwerte, die Eigenfrequenzen und die Eigenvektoren an (als Resultat des Ansatzes $a_n = a\sin(qn)$) und zeigen Sie, dass die Eigenvektoren senkrecht aufeinander stehen.

(3 Punkte)