Übungsaufgaben zur Vorlesung

Klassische Theoretische Physik I

Priv.-Doz. Dr. R. Bulla

SS 2010

Blatt 9: Abgabetermin: Dienstag, der 06.07.2010, 10:00 (vor Beginn der Vorlesung)

Aufgabe 1: elektrisches Feld und elektrostatisches Potential

a) Das elektrische Feld einer Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ ist gegeben durch

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int \mathrm{d}^3 r' \rho(\vec{r'}) \frac{\vec{r} - \vec{r'}}{|\vec{r} - \vec{r'}|^3} \ .$$

Zeigen Sie, dass für beliebige (diskrete oder kontinuierliche) Ladungsverteilungen gilt:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}) = \vec{0} \ .$$

b) Das elektrostatische Potential einer Ladungsverteilung ist gegeben durch

$$\phi(\vec{r}) = \int \mathrm{d}^3 r' \frac{\rho(\vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|}$$

Zeigen Sie, dass für dieses $\phi(\vec{r})$ gilt

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r}) \ .$$

(3 Punkte)

Aufgabe 2: Die dreidimensionale δ-Funktion

Berechnen Sie

a)

$$\int \mathrm{d}^3 r \vec{F}(\vec{r}) \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \ , \ \text{mit} \ \ \vec{F}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \sin(x)\cos(y) \\ \sin(x)\sin(y) \\ \cos(z) \end{pmatrix} \ , \ \text{und} \ \ \vec{r}_0 = \frac{\pi}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ .$$

b)

$$\int \mathrm{d}^3 r e^{-r^2} \delta(3\vec{r})$$

c)

$$\int_V \mathrm{d}^3 r f(\vec{r}) \sum_{n=0}^{4} \delta(\vec{r} - n\vec{a}) \ ,$$

mit

$$f(\vec{r}) = x + y + z \ , \ \vec{a} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ ,$$

und V das Volumen einer Kugel mit Radius 2 um den Ursprung.

(5 Punkte)

Aufgabe 3: Darstellungen der dreidimensionalen δ-Funktion

a) Betrachten Sie eine homogen geladene Kugel um den Koordinatenursprung mit Radius R und Gesamtladung Q. Geben Sie die Ladungsdichte $\rho_R(\vec{r})$ an und zeigen Sie, dass

$$\lim_{R \to 0} \rho_R(\vec{r}) = Q\delta(\vec{r}) \ .$$

b) In der Vorlesung wurde folgende Darstellung der δ-Funktion verwendet:

$$\vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r'}}{|\vec{r} - \vec{r'}|^3} = 4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r'}) \ . \qquad (1)$$

Zeigen Sie zunächst, dass die linke Seite der Gleichung für alle $\vec{r} \neq \vec{r'}$ verschwindet.

c) Setzen Sie jetzt in Gl. (1) $\vec{r'} = 0$ und integrieren Sie beide Seiten der Gleichung über das Volumen einer Kugel mit Zentrum im Koodinatenursprung und Radius R. Verwenden Sie für die Auswertung des Integrals auf der linken Seite den Gauß'schen Satz.

(6 Punkte)