Übungsaufgaben zur Vorlesung

# Klassische Theoretische Physik II

Priv.-Doz. Dr. R. Bulla, E. Gärtner

WS 2010/11

**Blatt I**: Abgabetermin: Dienstag, 19.10.2010, 10:00 Uhr

## Aufgabe 1: Gradient, Rotation, Divergenz

Die folgenden Berechnungen finden im $\mathbb{R}^3$ statt. Hierbei ist $r = |\vec{r}|$ der Betrag des Vektors $\vec{r}$. Die Vektoren $\vec{B}$ sowie $\vec{m}$ seien beliebig aber konstant in $\mathbb{R}^3$.

a) Bestimmen Sie das Gradientenfeld folgender Felder:

$$\varphi_1(\vec{r}) = r^n, \quad \varphi_2(\vec{r}) = \left(\vec{B} \times \vec{r}\right) \cdot \vec{r}.$$

b) Bestimmen Sie die Rotation des Vektorfeldes:

$$\vec{A}_1(\vec{r}) = \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3}.$$

c) Bestimmen Sie die Divergenz der Vektorfelder:

$$\vec{A}_2(\vec{r}) = r^n \vec{r}, \quad \vec{A}_3(\vec{r}) = r\nabla\left(\frac{1}{r^3}\right).$$

(5 Punkte)

## Aufgabe 2: Magnetfeld eines Leiters

Gegeben sei die Stromdichte eines unendlich dünnen Drahts

$$\vec{j}(\vec{r}) = j\delta(x)\delta(y)\vec{e}_z\ .$$

Berechnen Sie das von dieser Stromdichte erzeugte Magnetfeld mit Hilfe des Stokes'schen Satzes für $\vec{B}(\vec{r})$.
Hinweise:

- Setzen Sie für das Magnetfeld die Form (in Zylinderkoordinaten) $\vec{B}(\vec{r}) = f(\rho)\vec{e}_\varphi$ an, mit dem Einheitsvektor $\vec{e}_\varphi = \frac{1}{\rho}(-y, x, 0)$ in $\varphi$-Richtung, dem radialen Abstand $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ von der $z$-Achse und einer zu bestimmenden Funktion $f(\rho)$.
- Verwenden Sie als Integrationsweg für das Linienintegral eine geschlossene Kreislinie in der $x$-$y$-Ebene mit Radius $\rho$ um den Koordinatenursprung.

(5 Punkte)

### Aufgabe 3: Rotation — allgemeine Rechenregeln

Beweisen Sie für allgemeine skalare Felder $\varphi(\vec{r})$ und Vektorfelder $\vec{A}(\vec{r})$ die Gleichungen:

$$\begin{aligned} &\text{a)} \qquad \nabla \times \left(\varphi \vec{A}\right) = \varphi \nabla \times \vec{A} - \vec{A} \times \nabla \varphi \quad , \\ &\text{b)} \qquad \nabla \times \left(\nabla \times \vec{A}\right) = \nabla \left(\nabla \cdot \vec{A}\right) - \Delta \vec{A} \quad . \end{aligned}$$

(4 Punkte)

### Aufgabe 4: Maxwellgleichungen für Potentiale

Ausgehend von den Maxwellgleichungen (im Gauß-System) für die Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ sollen Sie in dieser Aufgabe die entsprechenden Gleichungen für das Vektorpotential $\vec{A}$ sowie das skalare Potential $\phi$ herleiten.

a) Beginnen Sie mit den homogenen Maxwellgleichungen. Drücken Sie die Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ durch die Hilfsgrößen $\vec{A}$ und $\phi$ aus. Nutzen Sie dazu, dass *i)* jedes divergenzfreie Vektorfeld $\vec{V}$ als Rotation eines Hilfsvektorsfeldes $\vec{A}$ sowie *ii)* jedes rotationsfreie Vektorfeld $\vec{W}$ als Gradient eines skalaren Hilfsfeldes $\phi$ dargestellt werden kann.

b) Setzen Sie die in a) erhaltenen Ausdrücke in die inhomogenen Maxwellgleichungen ein um diese in Abhängigkeit von $\vec{A}$ und $\phi$ darzustellen.

c) Die Hilfsgrößen $\vec{A}$ und $\phi$ sind im Gegensatz zu den physikalischen Feldern $\vec{E}$ und $\vec{B}$ nicht eindeutig bestimmt. Es besteht eine sog. Eichfreiheit, die hier ausgenutzt werden soll. Man kann zeigen, dass sich an die Felder eine der Bedingungen:

- $\nabla \vec{A} = 0$, (Coulomb-Eichung)
- $\nabla \vec{A} + \frac{1}{c}\partial_t \phi = 0$, (Lorentz-Eichung)

stellen lässt. Vereinfachen Sie die beiden inhomogenen Maxwellgleichungen jeweils in beiden Eichungen.

(6 Punkte)