Übungsaufgaben zur Vorlesung

Klassische Theoretische Physik II

Priv.-Doz. Dr. R. Bulla, E. Gärtner

WS 2010/11

Blatt XIII: Abgabetermin: Dienstag, 25.01.2011, 10:00 Uhr im Foyer

Aufgabe 42: Eichinvarianz der Lagrangegleichungen

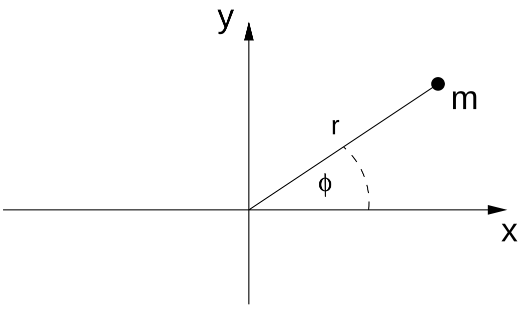
Ein physikalisches System mit nur einem Freiheitsgrad und der generalisierten Koordinate q wird durch die Lagrangefunktion $L(q, \dot{q}, t)$ beschrieben. Betrachten Sie nun eine Lagrangefunktion $L'(q, \dot{q}, t)$, die sich aus L durch Multiplikation mit einem konstanten Faktor $c \neq 0$ und Addition der totalen zeitlichen Ableitung einer beliebigen Funktion $f(q, t)$ ergibt:

$$L'(q, \dot{q}, t) = cL(q, \dot{q}, t) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(q, t) \ .$$

Zeigen Sie, dass eine Bahn $q(t)$, die die Lagrangegleichungen 2. Art für $L(q, \dot{q}, t)$ erfüllt, ebenfalls die Lagrangegleichungen 2. Art für $L'(q, \dot{q}, t)$ erfüllt.

(4 Punkte)

Aufgabe 43: Ebene Bewegung mit Zentralkraft, Erhaltungsgrößen



Wir betrachten die Bewegung eines Teilchens der Masse m in einem Potential $V(r)$ mit $r = |\vec{r}|$. Abgesehen von der Einschränkung auf die x-y-Ebene (siehe Abbildung) liegen keine weiteren Zwangsbedingungen vor.

a) Bestimmen Sie die Lagrangefunktion dieses Systems mit den generalisierten Koordinaten r und ϕ.

b) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen (Lagrangegleichungen 2. Art).

c) Welche Koordinate ist bei der ebenen Bewegung mit Zentralkraft zyklisch? Welche physikalische Größe ist damit erhalten?

d) Da die Lagrangefunktion nicht explizit von t abhängt folgt, dass die Größe $L - \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ ebenfalls eine Konstante ist. Hierbei sind $\{q_i\}$ die generalisierten Koordinaten des Problems. Berechnen Sie diese Konstante für das vorliegende Problem und geben Sie deren physikalische Bedeutung an.

(5 Punkte)

Aufgabe 44: Brachistochrone

Ein Massenpunkt mit Anfangsgeschwindigkeit Null soll in einem allgemeinen Potential $U(y)$ entlang der Bahn $y(x)$ reibungsfrei von $P_1 = (x_1, y_1)$ nach $P_2 = (x_2, y_2)$ laufen. Schreiben Sie die dafür benötigte Zeit Δt als Funktional $\Delta t[y] = \int \mathrm{d}x F[y, y', x]$. Wie lauten die zugehörigen Euler-Lagrange-Gleichungen?

(4 Punkte)

Aufgabe 45: Variationsrechnung auf Zylindermantel

Auf dem Mantel eines Zylinders mit Radius R seien die zwei Punkte $P_1 = (\varphi_1, z_1)$ sowie $P_2 = (\varphi_2, z_2)$ gegeben. Berechnen Sie den kürzesten Weg zwischen diesen beiden Punkten.
Hinweise: Parametrisieren Sie den Weg als Funktion $z(\varphi)$ und schreiben Sie die Strecke Δs als Funktional $\Delta s[z]$. Die Bahn ergibt sich dann aus der Lösung der zugehörigen Euler-Lagrange-Gleichungen.

(6 Punkte)