Übungsaufgaben zur Vorlesung

Klassische Theoretische Physik II

Priv.-Doz. Dr. R. Bulla, E. Gärtner

WS 2010/11

Blatt II: Abgabetermin: Dienstag, 26.10.2010, 10:00 Uhr

Aufgabe 5: Fourier-Transformation

Berechnen Sie die Fourier-Transformierte

$$g(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ikx} dx$$

folgender Funktion:

$$f(x) = \begin{cases} h(1 - a|x|) \ , & |x| < 1/a \\ 0 \ , & |x| > 1/a \end{cases}$$

Setzen Sie $h = a$ und skizzieren Sie $f(x)$. Diskutieren Sie hierfür den Grenzfall $g(k)$ für $a \to \infty$.
Hinweise:
i) Entwickeln Sie die trigonometrischen Funktionen bis zu hinreichender Ordnung.
ii) Eine Diskussion besteht immer aus zwei Teilen: zunächst wird ein Ergebnis schlüssig hergeleitet, danach wird dieses bewertet.

(5 Punkte)

Aufgabe 6: Elliptisch polarisiertes Licht

Die Maxwellgleichungen für den quellenfreien Fall erlauben Lösungen in Form von elektromagnetischen Wellen. Betrachten Sie nun das folgende Feld

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \left(\vec{E}_{0,1} + \vec{E}_{0,2}\right) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$$

mit

$$\vec{E}_{0,1} = (3ae^{i\pi/2}, 0, 0), \quad \vec{E}_{0,2} = (0, 0, a), \quad a \text{ reell}, \quad \vec{k} = (0, k, 0).$$

a) Bestimmen Sie die Zeitabhängigkeit der Polarisationsrichtungen des elektrischen und magnetischen Felds bei $\vec{r} = 0$. *Hinweis:* Verwenden Sie die Beziehung zwischen den Amplituden des elektrischen und magnetischen Feldes. Beachten Sie weiter, dass nur der Realteil der Felder physikalische Bedeutung hat. Insbesondere ist im folgenden mit $\vec{E}$ bzw. $\vec{B}$ immer $\text{Re}\left(\vec{E}\right)$ bzw. $\text{Re}\left(\vec{B}\right)$ gemeint.

b) Berechnen Sie die Orts- und Zeitabhängigkeit der Energiedichte u und der Energiestromdichte $\vec{S}$.
Hinweis:

$$u = \frac{1}{8\pi}\left(|\vec{E}|^2 + |\vec{B}|^2\right) \quad , \quad \vec{S} = \frac{c}{4\pi}\vec{E} \times \vec{B}$$

c) Die in b) berechneten Größen enthalten Terme, die mit der Kreisfrequenz ω oszillieren. Geben Sie die daraus resultierende Periode der Oszillation an. Bestimmen Sie dann die zeitgemittelte Energie- und Energiestromdichte über jeweils eine Periode.

(6 Punkte)

Aufgabe 7: Kugelwellen

Zeigen Sie, dass die vom Ursprung ausgehende skalare Kugelwelle

$$\psi(\vec{r}, t) = \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}$$

mit $k = \omega/c, r = |\vec{r}|$ die Wellengleichung

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\psi(\vec{r}, t) = 0$$

erfüllt.
Hinweis: Benutzen Sie den Laplaceoperator in Kugelkoordinaten.

(3 Punkte)

Aufgabe 8: Dispersion eines Wellenpakets

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass Lösungen der Maxwellgleichungen in Form von Wellenpaketen nicht zerfließen. Diese Tatsache hängt aber vom Dispersionsgesetz $\omega = \omega(k)$ ab, wie im folgenden gezeigt werden soll:
Betrachten Sie das Gaußsche Wellenpaket zur Zeit $t = 0$:

$$\mathcal{F}(x, t = 0) = ae^{-\frac{x^2}{2\sigma_0^2}}$$

mit der anfänglichen Breite σ_0. Die dazugehörige Fouriertransformierte ist

$$\mathcal{F}_0(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} ae^{-\frac{x^2}{2\sigma_0^2}}e^{-ikx}dx = \frac{a\sigma_0}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(k\sigma_0)^2},$$

welche wieder ein Gaußpaket ist, aber mit der Breite $1/\sigma_0$.
Berechnen Sie nun die Zeitentwicklung von $\mathcal{F}(x, t)$ für die beiden Dispersionsgesetze

$$\begin{array}{lrcl} \text{(I)} & \omega(k) & = & c_1k^2 \\ \text{(II)} & \omega(k) & = & c_2k \end{array}$$

mit den positiven Konstanten c_1 und c_2. Betrachten Sie der Einfachheit halber die Betragsquadrate, anstatt der Realteile. Wie verhält sich jeweils die Breite von $|\mathcal{F}(x, t)|^2$ als Funktion der Zeit t?

(6 Punkte)