Übungsaufgaben zur Vorlesung

Klassische Theoretische Physik II

Priv.-Doz. Dr. R. Bulla, E. Gärtner

WS 2010/11

Blatt V: Abgabetermin: Dienstag, 16.11.2010, 10:00 Uhr im Foyer

Aufgabe 15: Eigenzeit

Eine Uhr bewegt sich relativ zum Inertialsystem IS mit der Geschwindigkeit $v(t)$ in x-Richtung. Für $v(t)$ gilt:

$$v(t) = \begin{cases} +v_2 & \text{für } 0 < t < T \ , \\ -v_2 & \text{für } T < t < 2T, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die bewegte Uhr befindet sich zur IS-Zeit $t = 0$ am Ursprung von IS und ist mit einer IS-Uhr am Ursprung synchronisiert.

a) Um wieviel geht die bewegte Uhr bei der Rückkehr zum Ursprung von IS nach?

Betrachten Sie nun denselben Vorgang von einem relativ zu IS mit Geschwindigkeit v_1 in x-Richtung bewegten Inertialsystem IS' aus.

b) Welche Koordinaten haben die Ereignisse Umkehr und Ankunft der Uhr in IS'?

c) Welche Geschwindigkeiten hat die bewegte Uhr in IS'?

d) Berechnen Sie die Eigenzeit der bewegten Uhr von IS' aus und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem aus Aufgabe a).

(7 Punkte)

Aufgabe 16: Lorentztransformation für eine beliebige Richtung von $\vec{v}$

Ein Inertialsystem IS' bewegt sich relativ zu IS mit Geschwindigkeit $\vec{v}$. Die Achsen von IS und IS' sind parallel, die Richtung von $\vec{v}$ ist jedoch beliebig. Die zugehörige Lorentztransformation $\Lambda(\vec{v})$ lässt sich folgendermaßen konstruieren: zunächst wird mit Hilfe einer orthogonalen Matrix α die x-Achse von IS in Richtung von $\vec{v}$ gedreht, anschließend wird die spezielle Lorentztransformation $\Lambda(v)$ mit $v = |\vec{v}|$ in die neue x-Richtung durchgeführt, und schließlich wird die Drehung mit Hilfe der Matrix α^{T} wieder rückgängig gemacht.

Zeigen Sie, dass diese Abfolge von Transformationen auf das folgende Ergebnis führt:

$$\Lambda(\vec{v}) = \Lambda(\alpha^{\mathrm{T}})\Lambda(v)\Lambda(\alpha) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v_1/c & -\gamma v_2/c & -\gamma v_3/c \\ -\gamma v_1/c & l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ -\gamma v_2/c & l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ -\gamma v_3/c & l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix}$$

mit

$$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3), \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad l_{ij} = \delta_{ij} + (\gamma - 1)\frac{v_i v_j}{v^2}, \quad \alpha^T \alpha = \mathbf{1}_3.$$

Hinweis: die Matrix $\Lambda(\alpha)$ wurde in der Vorlesung angegeben. Beachten Sie, dass die Komponenten der Matrix α gegeben sind durch $\alpha_{ij} = \vec{e}_i^{\,\prime} \cdot \vec{e}_j$.

(6 Punkte)

Aufgabe 17: Transformationsverhalten

Gegeben sei die nicht-indizierte Größe

$$\alpha = \sum_{i=1}^{3} x_i,$$

wobei x_i die i-te Koordinate eines Punktes in $\mathbb{R}^3$ bezeichnet. In dieser Aufgabe sollen Sie zunächst zeigen, dass sich α unter orthogonalen Transformationen *nicht* wie ein Tensor 0-ter Stufe transformiert. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

a) Wählen Sie einen geeigneten Punkt $x \in \mathbb{R}^3$ aus und skizzieren Sie diesen in einem Koordinatensystem. Drehen Sie dieses Koordinatensystem um $\frac{\pi}{4}$ um die y-Achse. Geben Sie die Koordinaten von x sowohl im alten als auch neuen Koordinatensystem an und berechnen Sie jeweils α. Interpretieren Sie das Ergebnis geometrisch.

b) Zeigen Sie nun, dass eine orthogonale Transformation D mit

$$D : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad x_i' = \sum_{k=1}^{3} d_{ik} x_k, \quad i = 1, 2, 3$$

α im allgemeinen nicht invariant lässt. Wählen Sie dazu eine geeignete Transformation D, z.B. wie in a).

c) Wie transformiert die nicht-indizierte Größe

$$\beta = -\sum_{i=1}^{3} x_i x_i$$

unter orthogonalen Transformationen?

(4 Punkte)