Übungsaufgaben zur Vorlesung

Klassische Theoretische Physik II

Priv.-Doz. Dr. R. Bulla, E. Gärtner

WS 2010/11

Blatt VI: Abgabetermin: Dienstag, 23.11.2010, 10:00 Uhr im Foyer

Aufgabe 18: Trägheitstensor

In der Vorlesung wurde die Größe

$$J_{ij} = \sum_{k=1}^{N} m_k \left(r_k^2 \delta_{ij} - x_{k,i} x_{k,j} \right) ,$$

der sogenannte Trägheitstensor für ein System aus N Punktmassen mit Masse $m_k, \ k = 1, \ldots, N$ eingeführt. Hierbei bezeichnet $x_{k,i}$ die i-te Komponente des Ortsvektors des k-ten Teilchens und r_k den euklidischen Abstand zum Ursprung (welcher für diese Darstellung von J mit dem Massenschwerpunkt des Systems zusammenfällt).

a) Zeigen Sie, dass die Größen

$$L_{ij}^k := r_k^2 \delta_{ij}, \quad k = 1, \ldots, N$$

unter orthogonalen Transformationen im $\mathbb{R}^3$ wie Tensoren zweiter Stufe transformieren.

b) Zeigen Sie nun, dass die Größen

$$M_{ij}^k := x_{k,i} x_{k,j}, \quad k = 1, \ldots, N$$

unter orthogonalen Transformationen im $\mathbb{R}^3$ ebenfalls wie Tensoren zweiter Stufe transformieren. Was folgt aus dem Transformationsverhalten der L^k und M^k für den Trägheitstensor J?

(5 Punkte)

Aufgabe 19: Hyperbolische Bewegung

Die relativistische Bewegungsgleichung lautet

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \vec{F}.$$

Lösen Sie diese Gleichung unter der Annahme einer konstanten Kraft in x-Richtung, $F = mg$ mit konstanter Beschleunigung g, d.h. bestimmen Sie $v(t) = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ und $x(t)$ mit den Anfangsbedingungen $v(0) = 0, \ x(0) = 0$. Worauf reduzieren sich die Ausdrücke im nichtrelativistischen und ultrarelativistischen Grenzfall? Skizzieren Sie $v(t)$ und $x(t)$ und diskutieren Sie das Resultat.

(6 Punkte)

Aufgabe 20: Lorentztransformation der elektromagnetischen Felder

Der Feldstärketensor

$$F = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

ist ein Lorentztensor (zweiter Stufe). Beim Übergang in ein anderes Inertialsystem gilt $F' = \Lambda F \Lambda^T$ und F' hat in IS' dieselbe Gestalt wie F in IS:

$$F' = \begin{pmatrix} 0 & -E'_x & -E'_y & -E'_z \\ E'_x & 0 & -B'_z & B'_y \\ E'_y & B'_z & 0 & -B'_x \\ E'_z & -B'_y & B'_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Daraus können Sie die entsprechenden Lorentztransformationen für die Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ herleiten. Sie können sich auf eine Lorentztransformation in z-Richtung beschränken.

(5 Punkte)

Aufgabe 21: Lorentztensoren

Gegeben sind die Lorentztensoren zweiter Stufe, S und T. Zeigen Sie:

a) Die Summe $aS^{\alpha\beta} + bT^{\alpha\beta}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ ist ebenfalls ein Lorentztensor zweiter Stufe.

b) Das Produkt $S^{\alpha\beta}T^{\gamma\delta}$ ist ein Lorentztensor vierter Stufe.

Gegeben seien nun zwei Lorentzvektoren (Tensoren erster Stufe) V und W. Zwischen diesen gelte die Beziehung

$$V^\alpha = T^{\alpha\beta} W_\beta$$

in jedem Inertialsystem.

c) Beweisen Sie, dass in diesem Fall T ein Lorentztensor zweiter Stufe ist.

(4 Punkte)