Übungsaufgaben zur Vorlesung

Klassische Theoretische Physik II

Priv.-Doz. Dr. R. Bulla, E. Gärtner

WS 2010/11

Blatt VII: Abgabetermin: Dienstag, 30.11.2010, 10:00 Uhr im Foyer

Im Folgenden wird eine Kurznotation für Summen, die sogenannte Einsteinssche Summenkonvention verwendet. Diese Konvention besagt, dass über doppelt auftretende Indizes zu summieren ist:

$$A_\alpha B^\alpha \hat{=} \sum_{\alpha=0}^{3} A_\alpha B^\alpha.$$

Beispiel: für den Fall, dass A und B jeweils Lorentztensoren erster Stufe sind, ist das Ergebnis der Summation (auch Kontraktion genannt) ein Tensor nullter Stufe, sprich ein Skalar.

Aufgabe 22: Lorentztensoren (II)

In der Vorlesung wurde das Transformationsverhalten der kontravarianten Komponenten von Lorentz-Tensoren erster Stufe angegeben. Für die Koordinaten gilt explizit:

$$x'^{\ \alpha}(x^\beta) = \Lambda^\alpha_\beta x^\beta + b^\alpha.$$

Die kovarianten Komponenten transformieren sich dann wie folgt:

$$x'_\alpha(x_\beta) = \overline{\Lambda}^\beta_\alpha x_\beta + b_\alpha, \quad \text{mit} \quad \overline{\Lambda}^\gamma_\alpha \Lambda^\beta_\gamma = \delta^\beta_\alpha.$$

a) Zeigen Sie, dass die partielle Ableitung $\partial^\alpha = \partial/\partial x_\alpha = (c^{-1}\partial_t, -\nabla)$ sich wie ein Lorentzvektor transformiert.
Hinweis: Wenden Sie ∂^α auf eine hinreichend glatte Funtion $f(x'_\beta(x_\gamma))$ an.

b) Gegeben sind zwei Lorentzvektoren V und W. Zeigen Sie, dass $V_\alpha W^\alpha$ sich wie ein Lorentzskalar transformiert.

c) Was folgt aus b) für den d'Alembert-Operator?

d) Die erste Zeile des Feldstärketensors F ergibt in jedem IS die Komponenten des elektrischen Feldes. Wir definieren jetzt eine Größe

$$E^\alpha := -F^{0\alpha}.$$

Zeigen Sie, dass sich E^α *nicht* wie ein Lorentzvektor transformiert.

(5 Punkte)

Aufgabe 23: Gleichförmig bewegte Ladung

Bestimmen Sie das elektromagnetische Feld einer sich mit konstanter Geschwindigkeit $\vec{v}$ bewegten Ladung der Stärke q. Die Achsen des Inertialsystems IS seien so gelegt, dass sich die Ladung entlang der x-Achse in positive Richtung bewegt. Bestimmen Sie das Feld an einem beliebigen Beobachtungspunkt $P = (0, y_b, 0)$ auf der y-Achse. Wie sieht das EM-Feld im Limes kleiner Geschwindigkeiten $v \ll c$ aus?
Hinweis: Transformieren Sie in ein geeignetes System IS', in dem das EM-Feld bekannt ist. (Überlegen Sie sich, wie sich das Resultat aus Aufgabe 20) zum Transformationsverhalten des elektromagnetischen Feldes ändert, wenn die spezielle Lorentztransformation in x- statt in z-Richtung stattfindet.)

(6 Punkte)

Aufgabe 24: Feldstärketensor

Von der Vorlesung kennen Sie den Feldstärketensor $F^{\alpha\beta}$ und den dazugehörigen dualen Feldstärketensor $\widetilde{F}^{\alpha\beta}$.

a) Verifizieren Sie die Matrixdarstellung von $\widetilde{F}^{\alpha\beta}$.

b) Zeigen Sie, dass aus der Definition von $\widetilde{F}^{\alpha\beta}$ die Gleichung $\partial_\alpha \widetilde{F}^{\alpha\beta} = 0$ folgt.

c) Zeigen Sie die Äquivalenz von $\partial_\alpha \widetilde{F}^{\alpha\beta} = 0$ zu den homogenen Maxwellgleichungen.

d) Die Eichtransformation des elektromagnetischen Viererpotentials $A^\alpha = (\phi, \vec{A})$ lautet

$$A'^{\,\alpha} = A^\alpha - \partial^\alpha \chi$$

mit einer hinreichend oft stetig differenzierbaren Funktion $\chi(\vec{r}, t)$, dem sogenannten Eichfeld. Zeigen Sie, dass $F^{\alpha\beta}$ unter dieser Eichtransformation invariant ist.

(6 Punkte)

Aufgabe 25: (Lorentz-)Invarianten des elektromagnetischen Feldes

Die Lorentzinvarianten des elektromagnetischen Feldes sind die Invarianten des elektromagnetischen Feldstärketensors $F^{\alpha\beta}$. Kontraktion der beiden Lorentztensoren $F, \widetilde{F}$ ergibt triviale ($= 0$) oder nichttriviale ($=$ gesuchte Invarianten) Ergebnisse. Für letztere gibt es zwei Möglichkeiten: $F^2 = F_{\alpha\beta} F^{\beta\alpha}$ und $\widetilde{F}F = \widetilde{F}_{\alpha\beta} F^{\beta\alpha}$. Bestimmen Sie die Invarianten des elektromagnetischen Feldes unter Zuhilfenahme des Feldstärketensors $F^{\alpha\beta}$ und dessen dualem Tensor $\widetilde{F}^{\alpha\beta}$. Welche Eigenschaften der Lorentztransformation der Felder kann man aus jenen Invarianten ablesen?

(5 Punkte)