Übungsaufgaben zur Vorlesung

Klassische Theoretische Physik II

Priv.-Doz. Dr. R. Bulla, E. Gärtner

WS 2010/11

Blatt VIII: Abgabetermin: Dienstag, 07.12.2010, 10:00 Uhr im Foyer

Aufgabe 25: (Lorentz-)Invarianten des elektromagnetischen Feldes

Die Lorentzinvarianten des elektromagnetischen Feldes sind die Invarianten des elektromagnetischen Feldstärketensors $F^{\alpha\beta}$. Kontraktion der beiden Lorentztensoren $F, \widetilde{F}$ ergibt triviale ($= 0$) oder nichttriviale ($=$ gesuchte Invarianten) Ergebnisse. Für Letztere gibt es zwei Möglichkeiten: $F^2 = F_{\alpha\beta}F^{\beta\alpha}$ und $\widetilde{F}F = \widetilde{F}_{\alpha\beta}F^{\beta\alpha}$. Bestimmen Sie die Invarianten des elektromagnetischen Feldes unter Zuhilfenahme des Feldstärketensors $F^{\alpha\beta}$ und dessen dualem Tensor $\widetilde{F}^{\alpha\beta}$. Welche Eigenschaften der Lorentztransformation der Felder kann man aus jenen Invarianten ablesen?

(5 Punkte)

Aufgabe 26: Fouriertransformation der Wellengleichung

Die inhomogene Wellengleichung in nichtkovarianter Form lautet allgemein

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\psi\left(\vec{r},t\right) = -4\pi Q\left(\vec{r},t\right).$$

Die Fouriertransformierte von $\psi\left(\vec{r},t\right)$ bezüglich Ort und Zeit sei $\widetilde{\psi}(\vec{k},\omega)$, analog sei die Fouriertransformierte von $Q\left(\vec{r},t\right)$ durch $\widetilde{Q}(\vec{k},\omega)$ gegeben. Lösen Sie die Wellengleichung für $\widetilde{\psi}(\vec{k},\omega)$.

(4 Punkte)

Aufgabe 27: Fouriertransformation der Greenschen Funktion

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$\left(\Delta + m^2\right)G(\vec{r}-\vec{r}\,') = -4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}\,'), \quad m \in \mathbb{C} \text{ bel. aber fest.}$$

Zeigen Sie: ist $G(\vec{r}-\vec{r}\,')$ eine Lösung der obigen Differentialgleichung, so ist deren Fouriertransformierte gegeben durch

$$\widetilde{G}(\vec{k}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{k^2-m^2}.$$

(4 Punkte)

Aufgabe 28: Dipolmoment

Bestimmen Sie das Dipolmoment $\vec{p}(t)$ der folgenden Ladungsverteilungen:

a) Die Ladungsdichte eines Teilchens mit Ladung q, dass sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω auf einer Kreisbahn mit Radius R bewegt, sei gegeben durch:

$$\rho(\vec{r}, t) = q\delta(x - R\cos(\omega t + \alpha))\delta(y - R\sin(\omega t + \alpha))\delta(z).$$

Bestimmen Sie nun das komplexe $\vec{p}$ aus $\vec{p}(t) = \mathrm{Re}\,[\vec{p}e^{-i\omega t}]$, in dem die Zeitabhängigkeit von $\vec{p}(t)$ in eine Phase $e^{-i\omega t}$ absorbiert ist.

b) Eine durch Wechselspannung erzeugte Ladungsdichte in einem in der z-Achse liegenden Draht der Länge $2a$ sei gegeben durch:

$$\rho(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r})e^{-i\omega t} \text{ mit } \rho(\vec{r}) = \frac{q}{2a}\delta(x)\delta(y)\cos(\pi z/a)\Theta(a - |z|)$$

(4 Punkte)