Übungsaufgaben zur Vorlesung

Klassische Theoretische Physik II

Priv.-Doz. Dr. R. Bulla, E. Gärtner

WS 2010/11

Blatt IX: Abgabetermin: Dienstag, 14.12.2010, 10:00 Uhr im Foyer

Aufgabe 29: Dipol

Gegeben sei eine Ladungsstromdichte $\vec{j}(\vec{r})$, die nur auf einem begrenzten Gebiet von Null verschieden sei:

$$\vec{j}(\vec{r}) = \begin{cases} \vec{j}(\vec{r}) & \text{für } r < R_0 \\ 0 & \text{für } r \geq R_0. \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass in der Magnetostatik

$$\int d^3r \vec{j}(\vec{r}) = 0$$

folgt. Hierbei geht das Volumenintegral über den gesamten Raum. Was besagt diese Gleichung anschaulich?

Hinweis: Bedenken Sie, dass alle Integralgleichungen komponentenweise zu verstehen sind. Betrachten Sie die Hilfsgröße $\mathrm{div}(r_i \vec{j}(\vec{r}, t))$.

b) Nehmen Sie nun an, dass sowohl Ladungsdichte als auch Ladungsstromdichte eine Zeitabhängigkeit der Form $X(\vec{r}, t) = X(\vec{r})e^{-i\omega t}$ mit einer festen Frequenz ω besitzen. Zeigen Sie, dass in diesem Fall die Gleichung aus Aufgabenteil a) verallgemeinert zu

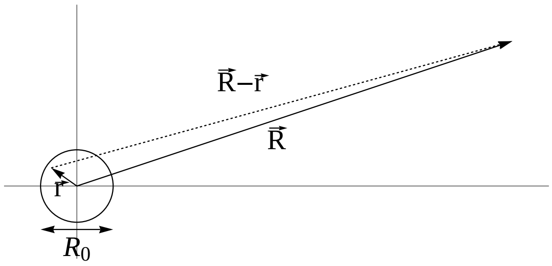
$$\int d^3r \vec{j}(\vec{r}) = -i\omega \int \vec{r}\rho(\vec{r}).$$

Hierbei ist $\rho(\vec{r})$ der zeitunabhängige Anteil der Ladungsdichte.

c) In der Vorlesung wurde das Magnetfeld $\vec{B}$ eines elektrischen Dipols in Fernfeldnäherung angegeben. Bestimmen Sie nun das daraus resultierende elektrische Feld $\vec{E}$ (natürlich ebenfalls in Fernfeldnäherung).

(6 Punkte)

Aufgabe 30: Multipolentwicklung



In der Elektrostatik hat man es oft mit räumlich begrenzten Ladungsverteilungen zu tun. Nehmen wir an, diese seien nur auf einem begrenzten Gebiet der Ausdehnung R_0 um den Ursprung von Null verschieden. Betrachtet man solch eine Ladungsverteilung aus einer großen Entfernung $R \gg R_0$ am Punkt $\vec{R}$ (siehe Skizze), so ist es notwendig eine Taylorentwicklung des Potentials $\frac{1}{|\vec{R}-\vec{r}|}$ für kleine $\vec{r}$ zu machen (genauer für $r \ll R$). Führen Sie die Taylorentwicklung von $\frac{1}{|\vec{R}-\vec{r}|}$ bis einschließlich zweiter Ordnung in $\vec{r}$ aus (Details zu mehrdimensionalen Ableitungen finden Sie im Skript zu KPT I).

(6 Punkte)

Aufgabe 31: Zwangsbedingungen

Formulieren Sie für die folgenden Probleme jeweils die Zwangsbedingungen, wenn möglich in der Form $f(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, t) = 0$.

a) Bewegung eines Doppelpendels in 3D: l_1 sei die Länge von Pendel 1, l_2 die Länge von Pendel 2; der Aufhängepunkt von Pendel 2 sei der Endpunkt von Pendel 1.

b) Bewegte schiefe Ebene: der Normalenvektor der schiefen Ebene liege in der (y, z)-Ebene, $\vec{n} = (0, n_y, n_z)$. Der Schnitt mit der (x, y)-Ebene ist die x-Achse $(x, 0, 0)$ und die schiefe Ebene bewege sich in Richtung der y-Achse mit der Geschwindigkeit v.

c) Bewegung eines Teilchens auf einer Helix mit Radius R und axialem Abstand (Ganghöhe) P.

d) Freie Bewegung eines Teilchens außerhalb einer Kugel mit Radius R.

(4 Punkte)