A. Dynamik des elektromagnetischen Feldes

A1. elektromagnetische Wellen

Ausgangspunkt sind die Maxwell-Gleichungen:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 & \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 4\pi\rho \\ \vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0 & \vec{\nabla}\times\vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \end{array}}$$

↓ homogene Maxwell-Gln.
→ enthalten keine Quellen

↓ inhomogene Maxwell-Gln

alle auftretenden Felder sind Funktionen von $(\vec{r},t)$: $\vec{B} = \vec{B}(\vec{r},t)$ etc.
↳ $\vec{B}, \vec{E}, \rho, \vec{j}$

$\vec{B}$: magnetisches Feld

$\vec{E}$: elektrisches Feld

ρ : Ladungsdichte

$\vec{j}$: Stromdichte

c : Lichtgeschwindigkeit

$\vec{\nabla}$: Nabla-Operator $\quad \vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$; $\vec{r} = (x,y,z)$

typische Aufgabe:

→ ρ und $\vec{j}$ sind vorgegeben

⇒ berechne die Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ über die Lösung der Maxwell-Gln

d.h. Lösung gekoppelter, partieller Differentialgleichungen → schwierig

– „einfache" Beispiele:

a) Elektostatik, d.h. $\vec{B} = 0$; alle Zeitableitungen $= 0$; $(\vec{j} = 0)$

⇒ Feldgleichungen der Elektostatik

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 4\pi\rho \\ \vec{\nabla}\times\vec{E} = 0 \end{array}}$$

ρ vorgegeben, $\vec{E}$ gesucht

b) Magnetostatik, d.h. $\vec{E} = 0$; alle Zeitableitungen $= 0$

$\Rightarrow$ Feldgleichungen der Magnetostatik

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j} \end{aligned}}$$

betrachte nun: $\rho = 0$ und $\vec{j} = 0$

in der Elektrostatik bzw. Magnetostatik bedeutet dies $\vec{E} = 0$, $\vec{B} = 0$

aber: es gibt Lösungen der (vollen) Maxwellgleichungen für $\rho = 0$ und $\vec{j} = 0$ mit $\vec{E} \neq 0$, $\vec{B} \neq 0$! $\rightarrow$ elektromagnetische Wellen

Behauptung:

für $\rho = 0$, $\vec{j} = 0$ sind die ebenen Wellen der Form

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r},t) &= \vec{E}_0 \cdot e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} \\ \vec{B}(\vec{r},t) &= \vec{B}_0 \cdot e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} \end{aligned}}$$

Lösungen der Maxwellgleichungen

- $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$ beliebig
- die Amplituden $\vec{E}_0$, $\vec{B}_0$ sind unabhängig von $\vec{r}$ und t

Beweis $\rightarrow$ Einsetzen in die Maxwellgleichungen

berechne zunächst $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}$, $\vec{\nabla} \cdot \vec{B}$, $\vec{\nabla} \times \vec{E}$, $\vec{\nabla} \times \vec{B}$

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \begin{pmatrix} E_x(\vec{r},t) \\ E_y(\vec{r},t) \\ E_z(\vec{r},t) \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r},t) = \frac{\partial}{\partial x} E_x(\vec{r},t) + \frac{\partial}{\partial y} E_y(\vec{r},t) + \frac{\partial}{\partial z} E_z(\vec{r},t)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} E_x(\vec{r},t) = \frac{\partial}{\partial x} E_{0,x}\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} e^{-i\omega t} = E_{0,x}\, e^{-i\omega t} \frac{\partial}{\partial x} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = \frac{\partial}{\partial x} e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)} = e^{ik_y y} e^{ik_z z} \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} e^{ik_x x}}_{= ik_x e^{ik_x x}}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{E}(\vec{r},t) = \underbrace{\left(E_{0,x}\, i k_x + E_{0,y}\, i k_y + E_{0,z}\, i k_z\right)}_{= i\,\vec{E}_0\cdot\vec{k}} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$$

analog: $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}(\vec{r},t) = i\,\vec{B}_0\cdot\vec{k}\; e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}(\vec{r},t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} E_{0,x}\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \\ E_{0,y}\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \\ E_{0,z}\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \end{pmatrix} = \ldots$$

erste Komponente: $\underbrace{\left[E_{0,z}\, i k_y - E_{0,y}\, i k_z\right]}_{= \text{erste Komponente von } i\,\vec{k}\times\vec{E}_0} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$

$$\ldots = i\,\vec{k}\times\vec{E}_0\; e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$$

analog: $\vec{\nabla}\times\vec{B}(\vec{r},t) = i\,\vec{k}\times\vec{B}_0\; e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$

<u>Einsetzen in die Maxwellgleichungen</u>

- $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0 \quad \Rightarrow \quad i\,\vec{E}_0\cdot\vec{k}\; \underbrace{e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}}_{\neq 0} = 0$

$$\Rightarrow \quad \vec{E}_0\cdot\vec{k} = 0 \qquad \text{d.h.} \quad \vec{E}_0 \perp \vec{k}$$

- $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{B}_0\cdot\vec{k} = 0 \qquad \text{d.h.} \quad \vec{B}_0 \perp \vec{k}$

- $\vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0$

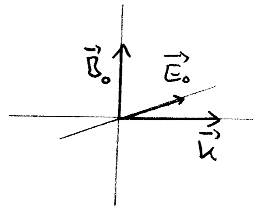
$$\Rightarrow \quad \left[i\,\vec{k}\times\vec{E}_0 - \frac{i\omega}{c}\vec{B}_0\right] \underbrace{e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}}_{\neq 0} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{k}\times\vec{E}_0 = \frac{\omega}{c}\vec{B}_0}\;(*) \qquad \text{d.h.} \quad \vec{B}_0 \perp \vec{k} \quad \text{und} \quad \vec{B}_0 \perp \vec{E}_0$$

$\rightarrow$ $\vec k, \vec E_0, \vec B_0$ bilden ein orthogonales Dreibein

z.B. $\vec k = \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec E_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ E_0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $\vec k \times \vec E_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ kE_0 \end{pmatrix}$

$$\vec B_0 = \frac{c}{\omega} \vec k \times \vec E_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{kc}{\omega} E_0 \end{pmatrix}$$



- $\vec\nabla \times \vec B - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec E}{\partial t} = 0$

$$\Rightarrow \underbrace{\left[i \vec k \times \vec B_0 + \frac{i\omega}{c} \vec E_0 \right]}_{=0} e^{i(\vec k \cdot \vec r - \omega t)} = 0$$

$$\Rightarrow \vec E_0 = -\frac{c}{\omega} \vec k \times \vec B_0 \qquad \text{Einsetzen in } (*)$$

$$\rightarrow -\frac{c}{\omega} \underbrace{\vec k \times (\vec k \times \vec B_0)}_{= \vec k \underbrace{(\vec k \cdot \vec B_0)}_{=0} - \vec B_0 \underbrace{(\vec k \cdot \vec k)}_{=k^2}} = \frac{\omega}{c} \vec B_0$$

$$k^2 \vec B_0 = \frac{\omega^2}{c^2} \vec B_0$$

$$\boxed{k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}}$$

$$k = \frac{|\omega|}{c}$$

wg $\vec a \times (\vec b \times \vec c) = (\vec a \cdot \vec c)\vec b - (\vec a \cdot \vec b)\vec c$

<u>Was folgt daraus?</u>

$\rightarrow$ Der Ansatz mit ebenen Wellen für $\vec E(\vec r,t)$ und $\vec B(\vec r,t)$ ist eine Lösung der Maxwellgleichungen für $\rho = 0$, $\vec j = 0$ sofern

- $\vec E_0 \perp \vec k$, $\vec B_0 \perp \vec k$
- $\vec B_0 = \frac{c}{\omega} \vec k \times \vec E_0$
- $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$

außerdem gilt: $|\vec B_0| = \frac{c}{|\omega|} \underbrace{|\vec k \times \vec E_0|}_{= |\vec k| \cdot |\vec E_0| \text{, da } \vec k \perp \vec E_0}$

$$= \frac{c}{|\omega|} k\, |\vec E_0| \qquad \Rightarrow \qquad |\vec E_0| = |\vec B_0|$$

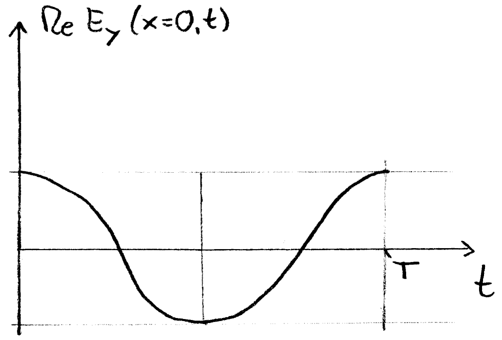
Frequenz und Wellenlänge

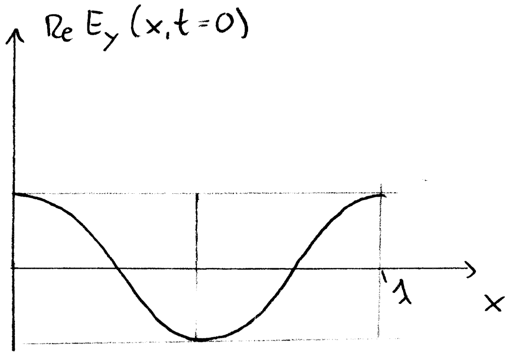
sei $\vec{k} = (k,0,0)$; $\vec{E}_0 = (0,E_0,0)$

$$\Rightarrow \quad \vec{E}(\vec{r},t) = \begin{pmatrix} 0 \\ E_0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(kx-\omega t)} = \begin{pmatrix} 0 \\ E_0 \\ 0 \end{pmatrix} \left[\cos(kx-\omega t) + i \sin(kx-\omega t) \right]$$

physikalisches Feld: $\quad \mathrm{Re}\, \vec{E}(\vec{r},t) = \begin{pmatrix} 0 \\ E_0 \\ 0 \end{pmatrix} \cos(kx-\omega t)$

$$\rightarrow \quad \mathrm{Re}\, E_y(x,t) = E_0 \cos(kx-\omega t)$$





$\omega T = 2\pi$

Kreisfrequenz $\quad \omega = \dfrac{2\pi}{T}$

Frequenz $\quad \nu = \dfrac{1}{T} = \dfrac{\omega}{2\pi}$

$k\lambda = 2\pi$

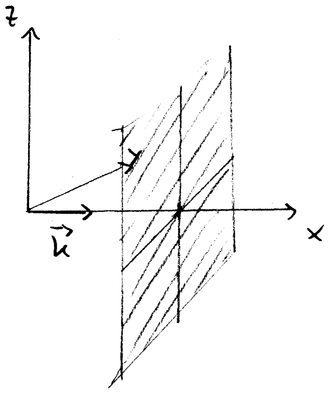
Wellenlänge $\quad \lambda = \dfrac{2\pi}{k} = \dfrac{2\pi c}{\omega} = \dfrac{c}{\nu} = Tc$

Warum "ebene" Welle

Flächen konstanter Phase φ sind Ebenen

für $k = (k,0,0) \quad \Rightarrow \quad \varphi = kx - \omega t$

gesucht: alle Vektoren $\vec{r}$ mit $\varphi = kx - \omega t \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = \frac{1}{k}(\varphi + \omega t) \\ y, z \text{ beliebig} \end{cases}$



Ebenen mit konstanter Phase φ bewegen sich mit Geschwindigkeit c in $\vec{k}$-Richtung

$$x = \frac{\varphi}{k} + \frac{\omega}{k} t = \frac{\varphi}{k} + ct$$

Kugelwelle

Phase $\varphi = kr - \omega t \qquad r = |\vec{r}|$

Flächen konstanter Phase definiert durch $r = \frac{1}{k}(\varphi + \omega t)$

$\longrightarrow$ konzentrische Kugeloberflächen

Polarisation

eine monochromatische, ebene Welle mit $\vec{E}(\vec{r},t) = \begin{pmatrix} 0 \\ E_0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(kx-\omega t)}$ ist in

y-Richtung linear polarisiert $\rightarrow$ Richtung von $\vec{E}(\vec{r},t)$ für alle $\vec{r},t$ gleich

betrachte jetzt:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = (\vec{E}_{0,1} + \vec{E}_{0,2})\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$$

mit $\vec{E}_{0,1} = (0, E_{01}, 0)$, $\vec{E}_{0,2} = (0, 0, E_{02})$

die E_{0i} sind komplexwertig, d.h. $\quad E_{0i} = |E_{0i}|\, e^{i\varphi_i} \qquad i = 1,2$

$$\Rightarrow E_{0i}\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} = |E_{0i}|\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \varphi_i)}$$

physikalisches Feld: $\quad \mathrm{Re}\, \vec{E}(\vec{r},t) = \begin{pmatrix} 0 \\ |E_{01}| \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \varphi_1) \\ |E_{02}| \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \varphi_2) \end{pmatrix}$

<u>sei $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$</u>

$$\Rightarrow \mathrm{Re}\, \vec{E}(\vec{r},t) = \begin{pmatrix} 0 \\ |E_{01}| \\ |E_{02}| \end{pmatrix} \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \varphi)$$

d.h. das elektrische Feld ist in Richtung $(0, |E_{0,1}|, |E_{02}|)$ linear polarisiert

<u>sei $\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{\pi}{2}$</u>

außerdem: $\quad |E_{01}| = |E_{02}| = a$

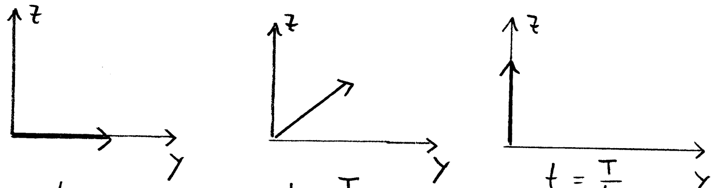
$$\Rightarrow \mathrm{Re}\, \vec{E}(\vec{r},t) = a \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \varphi_1) \\ \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \varphi_1 + \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} =$$

$$= a \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \varphi_1) \\ -\sin(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \varphi_1) \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$$

- $|\mathrm{Re}\,\vec{E}(\vec{r},t)|^2 = a^2$ unabhängig von $\vec{r},t$
- Richtung hängt aber von $\vec{r},t$ ab

setze z.B. $\vec{r} = 0$, $\varphi_1 = 0$

$$\Rightarrow \mathrm{Re}\,\vec{E}(\vec{r}=0,t) = a \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(-\omega t) \\ -\sin(-\omega t) \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \end{pmatrix}$$



$t = 0$ $\quad$ $t = \frac{T}{8} = \frac{1}{8\nu} = \frac{2\pi}{8\omega} \Rightarrow \omega t = \frac{\pi}{4}$ $\quad$ $t = \frac{T}{4}$

$\Rightarrow$ Welle ist zirkular polarisiert

Überlagerung elektromagnetischer Wellen

Behauptung: eine Überlagerung elektromagnetischer Wellen mit verschiedenen $\vec{k}$-Vektoren der Form

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r},t) = \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_0(\vec{k}_i)\, e^{i(\vec{k}_i\cdot\vec{r} - \omega(\vec{k}_i)\, t)}}$$

oder

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r},t) = \int d^3k\, \vec{E}_0(\vec{k})\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega(\vec{k})t)}}$$

$\vec{B}(\vec{r},t)$ jeweils analog

ist ebenfalls eine Lösung der Maxwellgleichungen für $\rho = 0$ und $\vec{j} = 0$

Beweis: Maxwellgleichungen sind linear!

z.B. $\vec{\nabla}\cdot(\vec{E}_1(\vec{r},t) + \vec{E}_2(\vec{r},t)) = \vec{\nabla}\cdot\vec{E}_1(\vec{r},t) + \vec{\nabla}\cdot\vec{E}_2(\vec{r},t)$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\left[\int d^3k\, \vec{E}_0(\vec{k})\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega(\vec{k})t)}\right] = \int d^3k\, \underbrace{\vec{\nabla}\cdot\left[\vec{E}_0(\vec{k})\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega(\vec{k})t)}\right]}_{= \ldots}$$

$$\ldots = i\,\vec{E}_0(\vec{k})\cdot\vec{k}\; e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega(\vec{k})t)}$$

es soll gelten: $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}(\vec{r},t) = 0$ für alle $\vec{r}, t$

$\Rightarrow \vec{E}_0(\vec{k}) \perp \vec{k}$ für jedes $\vec{k}$

außerdem: $\vec{B}_0(\vec{k}) = \frac{c}{\omega(\vec{k})}\vec{k}$

$k^2 = \frac{1}{c}\,\omega(\vec{k})^2 \longrightarrow \omega(\vec{k}) = kc$

<u>endliche Wellenpakete</u>

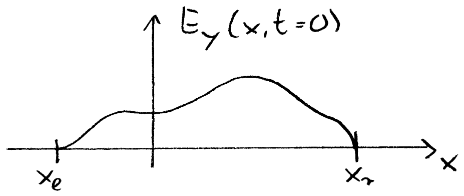
zur Vereinfachung: i, setze $\vec{k} = (k,0,0) \Rightarrow \int d^3k \rightsquigarrow \int_{-\infty}^{\infty} dk$

ii, alle $\vec{E}_0(\vec{k})$ in y-Richtung, d.h.

$$\vec{E}_0(\vec{k}) = (0, E_0(k), 0)$$

$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r},t) = \begin{pmatrix} 0 \\ E_y(x,t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit } E_y(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} dk\, E_0(k)\, e^{i(kx-\omega(k)t)}$$

zur Zeit $t=0$ sei $E_y(x,t=0)$ vorgegeben



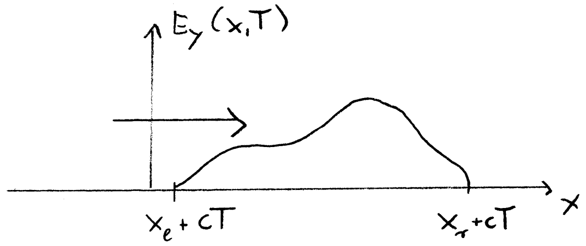
$$\Rightarrow \boxed{E_y(x,t=0) = \int_{-\infty}^{\infty} dk\, E_0(k)\, e^{ikx}}$$

$E_0(k)$ ist die Fourier-Transformierte von $E_y(x,t=0)$:

$$\boxed{E_0(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} E_y(x,t=0)\, e^{-ikx}\, dx}$$

das Wellenpaket bewegt sich mit Geschwindigkeit c in $\vec{k}$-Richtung!

$$\longrightarrow \text{betrachte } E_y(x,T) = \int_{-\infty}^{\infty} dk\, E_0(k)\, \underbrace{e^{i(kx-kcT)}}_{= e^{ik(x-cT)}} \overset{!}{=} E_y(x-cT, 0)$$



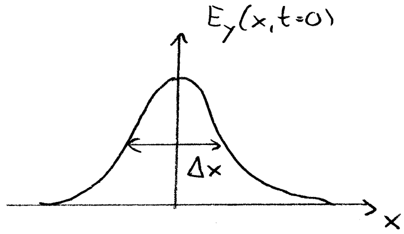
die Form des Wellenpakets ändert sich nicht!

warum?

Frequenz-Spektrum eines Wellenpakets

Beispiel: Gaußsches Wellenpaket

$$E_y(x, t=0) = a\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\Delta x}\right)^2}$$



$$\Rightarrow \quad E_0(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} a\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\Delta x}\right)^2} e^{-ikx}\, dx$$

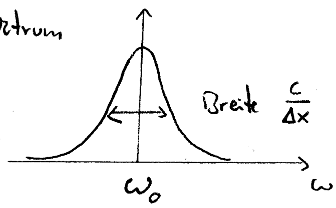
$$= a \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Delta x\, e^{-\frac{1}{2}(k\Delta x)^2}$$ $\longrightarrow$ ebenfalls eine Gaußverteilung, Breite $\frac{1}{\Delta x}$

Zeitentwicklung des Wellenpakets

$$E_y(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} dk\, E_0(k)\, e^{i(kx - \omega(k)t)}$$

jede Beitrag zum Integral mit Wellenzahl k
$\rightarrow$ Frequenz $\omega(k) = kc$

$\Rightarrow$ Frequenz-Spektrum



Für $\Delta x \to \infty$:
$\frac{c}{\Delta x} \to 0$: monochromatische Welle

Unschärfe-Relation

$$\underbrace{\text{Breite des Wellenpakets im Orts-Raum}}_{\Delta x} \cdot \underbrace{\text{... im } k\text{-Raum}}_{\frac{1}{\Delta x}} \geq \text{const}$$

Warum zerfließt das Wellenpaket nicht?

$\longrightarrow$ lineare Dispersion $\boxed{\omega(k) = kc}$

betrachte $(kx - \omega(k)t) = k\left(x - \frac{\omega(k)}{k} t\right)$

jede Anteil zum Integral bewegt sich mit der Geschwindigkeit $\frac{\omega(k)}{k}$

im Folgenden $\longrightarrow$ Zeitentwicklung, d.h. die Bewegung mit Geschwindigkeit c, läßt sich direkt aus der Struktur der Maxwellgleichungen ablesen nochmals:

die Maxwellgleichungen für $\rho = 0$, $\vec{j} = 0$

$$\boxed{\begin{array}{llll} (1) & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 & (3) & \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \\ (2) & \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 & (4) & \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 \end{array}}$$

bilde: $-\vec{\nabla} \times [\,\text{Gl. (2)}\,]$:

$$- \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \vec{\nabla} \times \left[\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right] = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \left[\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right] = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{B}}_{\overset{(4)}{=} \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla} \underbrace{(\vec{\nabla} \cdot \vec{E})}_{\overset{(3)}{=} 0} - \Delta \vec{E}$$

also: $\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\Box \vec{E} = 0}$$

mit dem d'Alembert-Operator $\Box = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

analog für das Magnetfeld: $\boxed{\Box \vec{B} = 0}$.

setze im folgenden $\vec{k} = (k, 0, 0)$

→ wie in den Beispielen zuvor soll $\vec{E}$ nur von (x,t) abhängen: $\vec{E}(\vec{r},t) \to \vec{E}(x,t)$

d.h. $\frac{\partial^2}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ ergeben 0

und es folgt:

$$\boxed{\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{E}(x,t) = 0} \quad (*)$$

<u>Behauptung</u>: für eine beliebige Funktion f gilt $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) f(x \pm ct) = 0$

d.h. eine explizite Lösung der Dgl. $(*)$ ist nicht notwendig

→ beliebige Wellenpakete $f(x)$ (zur Zeit $t=0$) bewegen sich mit Geschwindigkeit c in $\pm x$-Richtung

Beweis: sei $a(x,t) = x + ct$

$$\frac{\partial}{\partial x} f(a(x,t)) = \frac{df}{da}\frac{\partial a}{\partial x} \; ; \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(a(x,t)) = \frac{d^2 f}{da^2}\underbrace{\left(\frac{\partial a}{\partial x}\right)^2}_{=1} + \frac{df}{da}\underbrace{\frac{\partial^2 a}{\partial x^2}}_{=0}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} f(a(x,t)) = \frac{df}{da}\frac{\partial a}{\partial t} \; ; \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} f(a(x,t)) = \frac{d^2 f}{da^2}\underbrace{\left(\frac{\partial a}{\partial t}\right)^2}_{=c^2} + \frac{df}{da}\underbrace{\frac{\partial^2 a}{\partial t^2}}_{=0}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) f(a(x,t)) = \frac{d^2 f}{da^2} - \frac{c^2}{c^2}\frac{d^2 f}{da^2} = 0 \quad \text{für jede Funktion } f(a)$$

Hinweis: Maxwellgleichungen für die Potentiale

$$\boxed{\Box \vec{A} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j} \quad , \quad \Box \Phi = -4\pi\rho}$$

d.h. die Lösungen für die Potentiale haben ebenfalls die Form

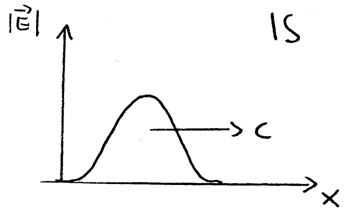
$$\vec{A}(x,t) = \vec{a}^{(r)}(x-ct) + \vec{a}^{(l)}(x+ct)$$
$$\Phi(x,t) = \phi^{(r)}(x-ct) + \phi^{(l)}(x+ct)$$

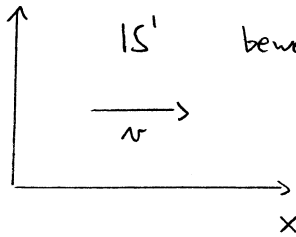
elektrische und magnetische Felder ergeben sich daraus über:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \; ; \quad \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$$

Fazit von Kap. A.1

Es existieren Lösungen der Maxwellgleichungen für den feldfreien Fall, die sich in dem Inertialsystem, in dem die Maxwellgleichungen definiert sind, mit Geschwindigkeit c ausbreiten.





IS' bewegt sich relativ zu IS mit Geschwindigkeit v in x-Richtung

$\Rightarrow$ Mit welcher Geschwindigkeit bewegt sich das Wellenpaket in IS'?

Galilei-Transformation: $c' = c - v$

aber: Licht breitet sich in jedem IS mit der gleichen Geschwindigkeit c aus → Maxwellgleichungen gelten in jedem IS

beim Übergang von IS → IS'

Maxwellgleichungen sind forminvariant unter Lorentz-Transformationen

A.2 Spezielle Relativitätstheorie

A.2.1 Einführung

Relativitätsprinzip (Galilei): 1. Alle Inertialsysteme sind gleichwertig
2. Die Newtonschen Axiome gelten in allen Inertialsystemen

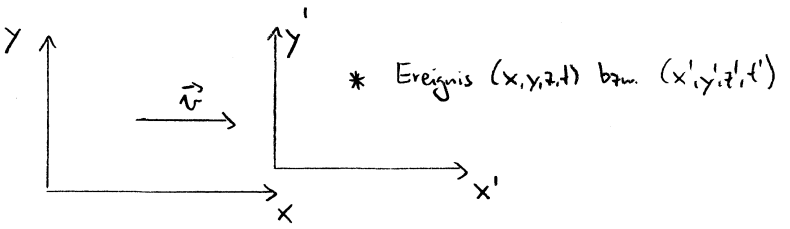
gleichwertig heisst: alle grundlegenden physikalischen Gesetze haben in allen IS die gleiche Form

im folgenden: Punkt 1 ok
Punkt 2 wird modifiziert

⇒ (u.a.) die Begriffe Raum und Zeit verlieren teilweise ihre absolute Bedeutung

Ereignis: definiert durch die Angabe der Koordinaten (x, y, z, t) in einem bestimmten Inertialsystem IS

→ Wie lauten die Koordinaten dieser Ereignisse in einem relativ zu IS mit Geschwindigkeit $\vec{v}$ bewegten Inertialsystem IS'? → (x', y', z', t')



Galileitransformation für $\vec{v} = (v, 0, 0)$

$$x' = x - vt \;, \quad y' = y \,, \quad z' = z \,, \quad t' = t$$

Bewegung eines Photons in IS und IS':

Zur Zeit $t = t' = 0$ wird ein Photon vom Ursprung von IS (= Ursprung von IS') ausgesandt.

$\rightarrow$ Position des Photons in IS : (x,t)

in IS' : (x',t')

Annahme : das Photon bewege sich in IS' mit der Geschwindigkeit c

d.h. $\frac{dx'}{dt'} = c \quad , \quad x' = ct'$

$\Rightarrow$ (Galilei-Transformation) $x = x' + vt = ct' + vt = ct + vt = (c+v)t$

$$\frac{dx}{dt} = c + v$$

d.h. in IS hat das Licht die Geschwindigkeit $c+v$

dies steht aber im Widerspruch zur experimentellen Tatsache ($\rightarrow$ Michelson-Versuch)

Konstanz der Lichtgeschwindigkeit $c = 2.998 \cdot 10^8 \, \frac{m}{s}$

$\Rightarrow$ Relativitätsprinzip (Einstein) : 1. Alle IS sind gleichwertig

2. Licht pflanzt sich in jedem IS mit Geschwindigkeit c fort

aus 2 folgt : die Maxwell-Gleichungen gelten in allen Inertialsystemen

Abstand von Ereignissen

betrachte zwei Ereignisse : (t_1, x_1, y_1, z_1) und (t_2, x_2, y_2, z_2)

Def.: Quadrat des Abstands zwischen den Ereignissen:

$$S_{12}^2 = c^2 (t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2$$

Beispiele:

- $t_2 = t_1$; $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$, oder $z_1 \neq z_2$ $\Rightarrow$ $S_{12}^2 < 0$
- Ereignis 1 : $(0,0,0,0)$
  Ereignis 2 : $(\pm \frac{x}{c}, x, 0, 0)$ $\Big\}$ $S_{12}^2 = c^2 \frac{x^2}{c^2} - x^2 = 0$

Koordinaten der beiden Ereignisse in IS' : (t_1', x_1', y_1', z_1') und (t_2', x_2', y_2', z_2')

Abstand in IS' : $S_{12}'^2 = c^2 (t_2' - t_1')^2 - (x_2' - x_1')^2 - (y_2' - y_1')^2 - (z_2' - z_1')^2$

speziell: Ereignis 1 : Emission eines Photons $\longrightarrow$ $(0,0,0,0)$ in IS und IS'

Ereignis 2 : Absorption dieses Photons $\longrightarrow$ (t,x,y,z) in IS

(t',x',y',z') in IS'

Photon bewegt sich mit Geschwindigkeit $v = \frac{1}{t}\sqrt{x^2+y^2+z^2} = c$

$\Rightarrow \quad c^2t^2 = x^2+y^2+z^2 \quad$ d.h. $s_{12}^2 = 0$

dies gilt ebenso in IS' !

$\Rightarrow \quad c^2t'^2 = x'^2+y'^2+z'^2 \quad$ d.h. $s_{12}'^2 = 0$

allgemein (nicht nur für Photonen) gilt: $\boxed{s_{12}'^2 = s_{12}^2}$

betrachte jetzt ein gleichförmig bewegtes Teilchen

Ereignis 1: $(0,0,0,0)$ in IS und IS'

Ereignis 2: $(t,x,0,0)$ in IS $\longrightarrow$ $x = vt$: $(t, vt, 0, 0)$

$(t',x',0,0)$ in IS'

Abstand dieser beiden Ereignisse in IS: $s_{12}^2 = (c^2-v^2)t^2$

Frage: wie lauten die Koordinaten von Ereignis 2 in IS', damit gilt:

$$s_{12}'^2 = c^2t'^2 - x'^2 \overset{!}{=} s_{12}^2 = (c^2-v^2)t^2 \quad ?$$

d.h. welche Transformation (Koordinaten in IS) $\longrightarrow$ (Koordinaten in IS')

ändert das Abstandsquadrat nicht?

A.2.2

Lorentztransformationen

Schreibweise: $(x^\alpha) = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$

Achtung: Indizes oben

Definition:
$$\eta = (\eta_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Abstand zwischen zwei infinitesimal benachbarten Ereignissen

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = \sum_{\alpha=0}^{3} \sum_{\beta=0}^{3} \eta_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta \equiv \eta_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta$$

Achtung: Summenkonvention $\rightarrow$ über zwei gleiche Indizes (einer unten, einer oben) wird summiert

es soll gelten: $\boxed{ds'^2 = ds^2}$ (*)

im folgenden: Aufstellen der Transformation, die die Gl. (*) erfüllt

<u>Ansatz:</u> $\boxed{x'^\alpha = \Lambda^\alpha_{\ \beta} x^\beta + b^\alpha}$ Lorentztransformation

$\Lambda^\alpha_{\ \beta}, b^\alpha$ hängen von der Relation zwischen IS und IS' ab
<u>nicht</u> von den Koordinaten

Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda^0_{\ 0} & \Lambda^0_{\ 1} & \Lambda^0_{\ 2} & \Lambda^0_{\ 3} \\ \Lambda^1_{\ 0} & \Lambda^1_{\ 1} & \Lambda^1_{\ 2} & \Lambda^1_{\ 3} \\ \Lambda^2_{\ 0} & \Lambda^2_{\ 1} & \Lambda^2_{\ 2} & \Lambda^2_{\ 3} \\ \Lambda^3_{\ 0} & \Lambda^3_{\ 1} & \Lambda^3_{\ 2} & \Lambda^3_{\ 3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b^0 \\ b^1 \\ b^2 \\ b^3 \end{pmatrix}$$

bzw. $x' = \Lambda x + b$ mit $x' = (x'^\alpha)$, $\Lambda = (\Lambda^\alpha_{\ \beta})$, ...

<u>es gilt:</u> $\boxed{dx'^\alpha = \Lambda^\alpha_{\ \beta}\, dx^\beta}$

<u>Beweis:</u> betrachte $\Delta x'^\alpha = x_1'^\alpha - x_2'^\alpha = \Lambda^\alpha_{\ \beta} x_1^\beta + b^\alpha - \Lambda^\alpha_{\ \beta} x_2^\beta - b^\alpha$

$$= \Lambda^\alpha_{\ \beta} (x_1^\beta - x_2^\beta) = \Lambda^\alpha_{\ \beta}\, \Delta x^\beta$$

aus der Invarianz $ds'^2 = ds^2$ folgt damit:

$$ds'^2 = \eta_{\alpha\beta}\, dx'^\alpha dx'^\beta = \underbrace{\eta_{\alpha\beta} \Lambda^\alpha_{\ \gamma} dx^\gamma \Lambda^\beta_{\ \delta} dx^\delta \overset{!}{=} ds^2 = \eta_{\gamma\delta}\, dx^\gamma dx^\delta}_{\text{diese Gleichung soll für beliebige } dx \text{ gelten}}$$

$\Rightarrow$ ...

$$\Rightarrow \boxed{\Lambda^\alpha{}_\gamma \Lambda^\beta{}_\delta \eta_{\alpha\beta} = \eta_{\gamma\delta}}$$

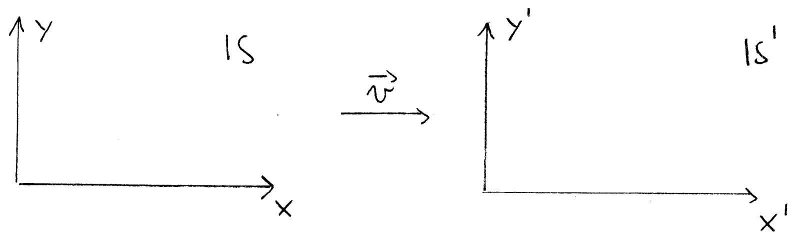
ausgeschrieben $\eta_{\gamma\delta} = \sum_{\alpha=0}^{3}\sum_{\beta=0}^{3} \underbrace{\Lambda^\alpha{}_\gamma}_{=(\Lambda^T)^\gamma{}_\alpha} \eta_{\alpha\beta} \Lambda^\beta{}_\delta = \underbrace{(\Lambda^T \eta \Lambda)}_{\text{Matrixprodukt}}{}_{\gamma\delta}$

↑ die transponierte Matrix

$$\rightarrow \Lambda^T \eta \Lambda = \eta$$

das entspricht der Bedingung $\alpha^T \alpha = 1$ bei orthogonalen Transformationen

spezielle Lorentztransformation



Relativbewegung nur in x-Richtung

$\Rightarrow y = y'$
$z = z'$

das Ereignis: „der Ursprung von IS' befindet sich am Ursprung von IS" habe die Koordinaten $(ct, x, y, z) = (0,0,0,0)$ in IS und

$(ct', x', y', z') = (0,0,0,0)$ in IS'

→ Einsetzen in $x'^\alpha = \Lambda^\alpha{}_\beta x^\beta + b^\alpha$

$0 = 0 + b^\alpha \qquad \Rightarrow b^\alpha = 0$

aus $x'^2 = x^2$ und $x'^3 = x^3$ folgt

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda^0{}_0 & \Lambda^0{}_1 & 0 & 0 \\ \Lambda^1{}_0 & \Lambda^1{}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

betrachte die Folge von Ereignissen: „Position des Ursprungs von IS'"

Koordinaten in IS: $(ct, x, 0, 0) \overset{!}{=} (ct, vt, 0, 0)$

in IS': $(ct', 0, 0, 0)$

für diese Folge von Ereignissen gilt also:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda^0_{\ 0} & \Lambda^0_{\ 1} \\ \Lambda^1_{\ 0} & \Lambda^1_{\ 1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ vt \end{pmatrix} \qquad (*)$$

zunächst: die Matrixelemente von Λ sind nicht unabhängig

$\longrightarrow$ verknüpft durch $\Lambda^\alpha_{\ \gamma} \Lambda^\beta_{\ \delta} \eta_{\alpha\beta} = \eta_{\gamma\delta}$

im relevanten Unterraum läßt sich diese Bedingung schreiben als:

$$\begin{pmatrix} \Lambda^0_{\ 0} & \Lambda^1_{\ 0} \\ \Lambda^0_{\ 1} & \Lambda^1_{\ 1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda^0_{\ 0} & \Lambda^0_{\ 1} \\ \Lambda^1_{\ 0} & \Lambda^1_{\ 1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ausmultiplizieren ergibt:

$$\begin{pmatrix} (\Lambda^0_{\ 0})^2 - (\Lambda^1_{\ 0})^2 & \Lambda^0_{\ 0}\Lambda^0_{\ 1} - \Lambda^1_{\ 0}\Lambda^1_{\ 1} \\ \Lambda^0_{\ 1}\Lambda^0_{\ 0} - \Lambda^1_{\ 1}\Lambda^1_{\ 0} & (\Lambda^0_{\ 1})^2 - (\Lambda^1_{\ 1})^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

das ergibt drei Bedingungen

<u>Behauptung</u>: diese Bedingungen lassen sich erfüllen durch:

$$\begin{pmatrix} \Lambda^0_{\ 0} & \Lambda^0_{\ 1} \\ \Lambda^1_{\ 0} & \Lambda^1_{\ 1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\psi & -\sinh\psi \\ -\sinh\psi & \cosh\psi \end{pmatrix}$$

<u>Beweis</u>:

$$\cosh\psi = \frac{1}{2}\left(e^{\psi} + e^{-\psi}\right)$$
$$\sinh\psi = \frac{1}{2}\left(e^{\psi} - e^{-\psi}\right)$$

es gilt: $\cosh^2\psi - \sinh^2\psi = 1$

a) $(\Lambda^0_{\ 0})^2 - (\Lambda^1_{\ 0})^2 = \cosh^2\psi - \sinh^2\psi = 1$ ✓

b) $(\Lambda^0_{\ 1})^2 - (\Lambda^1_{\ 1})^2 = \sinh^2\psi - \cosh^2\psi = -1$ ✓

c) $\Lambda^0_{\ 0}\Lambda^0_{\ 1} - \Lambda^1_{\ 0}\Lambda^1_{\ 1} = \cosh\psi\,(-\sinh\psi) - (-\sinh\psi)\cosh\psi = 0$ ✓

Einsetzen in $(*)$

$$\begin{pmatrix} ct' \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\psi & -\sinh\psi \\ -\sinh\psi & \cosh\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ vt \end{pmatrix}$$

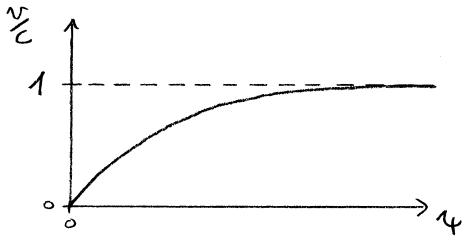
$\Rightarrow$ 2 Gleichungen:

$$\text{I} \quad ct' = ct\cosh\psi - vt\sinh\psi$$
$$\text{II} \quad 0 = -ct\sinh\psi + vt\cosh\psi$$

aus II folgt: $\quad ct \sinh \psi = vt \cosh \psi$

$$\frac{\sinh \psi}{\cosh \psi} = \tanh \psi = \frac{v}{c} \qquad \boxed{\psi = \operatorname{artanh} \frac{v}{c}}$$

↓ Rapidität



$$\frac{v}{c} = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$$

$\Rightarrow$ Einschränkung $\frac{v}{c} < 1$

spezielle LT für beliebige Ereignisse (ct, x, y, z)

$$\boxed{\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \psi & -\sinh \psi \\ -\sinh \psi & \cosh \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} , \quad y' = y \, , \; z' = z}$$

mit $\psi = \operatorname{artanh} \frac{v}{c}$

Def.: $\quad \gamma = \cosh \psi = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$

Beweis: $\frac{v}{c} = \frac{\sinh \psi}{\cosh \psi} \Rightarrow 1 - \frac{v^2}{c^2} = 1 - \frac{\sinh^2 \psi}{\cosh^2 \psi} =$

$$= \frac{1}{\cosh^2 \psi} \underbrace{(\cosh^2 \psi - \sinh^2 \psi)}_{= 1} = \frac{1}{\gamma^2} \quad \text{ok}$$

außerdem: $\quad \frac{v}{c} = \frac{\sinh \psi}{\gamma} \quad \Rightarrow \quad \sinh \psi = \gamma \frac{v}{c}$

die spezielle LT hat damit die Form

$$\boxed{\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma \frac{v}{c} \\ -\gamma \frac{v}{c} & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} , \quad y' = y \, , \; z' = z}$$

ausgeschrieben

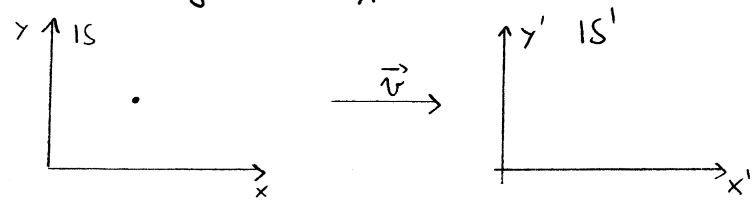
$$ct' = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \left(ct - x \frac{v}{c} \right)$$

$$x' = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \left(x - vt \right)$$

$$y' = y \; ; \quad z' = z$$

Was haben wir bis jetzt erreicht?

$\longrightarrow$ betrachte ein Ereignis (ct, x, y, z) in IS



die (spezielle) Lorentztransformation $x'^{\alpha} = \Lambda^{\alpha}_{\ \beta}\, x^{\beta}$ ergibt die Koordinaten dieses Ereignisses in IS': (ct', x', y', z')

im folgenden: Verknüpfung verschiedener Ereignisse in IS und IS'

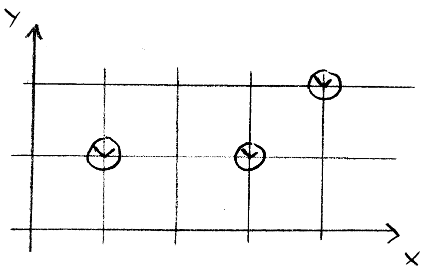
z.B.:
- Bahnkurve $\rightarrow$ Folge von Ereignissen
- Form von Objekten, z.B. ▭ $\longrightarrow$ Längenkontraktion
- bewegte Uhren $\longrightarrow$ Zeitdilatation

der Limes $v/c \ll 1$

$$\gamma \rightarrow 1 \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{aligned} ct' &= ct \\ x' &= x - vt \end{aligned}\right\} \text{ Galileo-Transformation}$$

A.2.3 Längen- und Zeitmessung

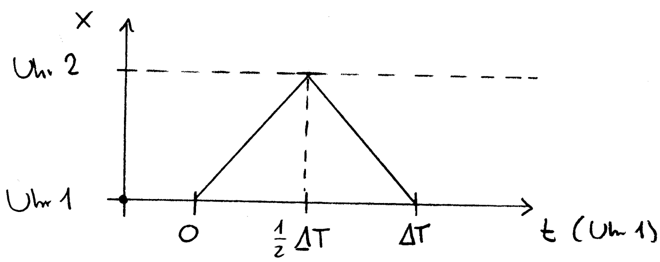
Koordinatennetz eines Inertialsystems IS



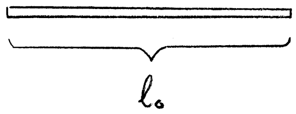
- realisiert durch ruhende, geeichte Längenmaßstäbe

außerdem: ruhende, gleichartige Uhren, die alle dieselbe IS-Zeit anzeigen

$\Rightarrow$ Synchronisation $\sim$ durch den Austausch von Signalen



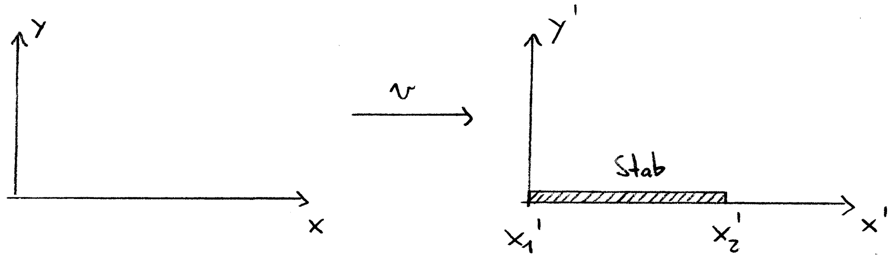
bewegte Maßstab



Stab ruht in einem Inertialsystem IS'
Messung der Länge in IS' ergibt die Eigenlänge l_0

die Eigenlänge ist unabhängig vom IS $\longrightarrow$ Lorentzskalar

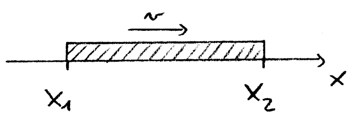
jetzt: IS' bewegt sich relativ zu IS mit Geschwindigkeit v



$\hookrightarrow \; l_0 = x_2' - x_1'$

Messung der Länge des Stabs in IS $\longrightarrow$ verlangt eine genaue Meßvorschrift!

$\longrightarrow$ markiere zur IS-Zeit $t = 0$ die Position von Stabanfang und -ende auf der x-Achse $\longrightarrow$ 2 Ereignisse!



Ereignis 1: $\begin{cases} x_1 = 0 \,, & t_1 = 0 \\ x_1' = 0 \,, & t_1' = 0 \end{cases}$ $\longleftarrow$ IS und IS' zur Zeit $t_1 = t_1' = 0$ fallen zusammen

Ereignis 2: $\begin{cases} x_2 \,, & t_2 = 0 \\ x_2' = l_0 \,, & t_2' \end{cases}$

für diese spezielle Lorentztransformation gilt für beide Ereignisse

$$\boxed{\begin{aligned} ct' &= \gamma\left(ct - x\frac{v}{c}\right) \\ x' &= \gamma\,(x - vt) \end{aligned}}$$

$\longrightarrow$ erfüllt für Ereignis 1 für Ereignis 2 gilt:

$$ct_2' = \gamma\left(ct_2 - x_2\frac{v}{c}\right) = -\gamma\frac{v}{c}x_2$$

$$x_2' = \gamma\left(x_2 - vt_2\right) = \gamma x_2 \stackrel{!}{=} l_0$$

$\Rightarrow$ Länge des Stabs in IS $\longrightarrow$ $l = x_2 - x_1 = x_2 = \frac{1}{\gamma}l_0$

Längenkontraktion $\boxed{l = l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ $\qquad 0 \leq \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \leq 1$

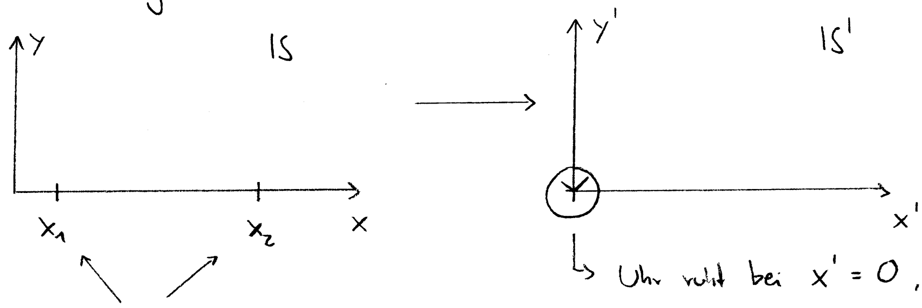
für t_2' folgt damit: $ct_2' = -\gamma\frac{v}{c}\frac{1}{\gamma}l_0 = -\frac{v}{c}l_0 \leq 0$!

d.h. Ereignis 1 und 2 sind gleichzeitig in IS, aber <u>nicht</u> gleichzeitig in IS'

<u>Achtung:</u> die Längenkontraktion ist eine Aussage, die sich auf eine bestimmte Messvorschrift bezieht!

<u>bewegte Uhr</u>

betrachte den Gang einer in IS' ruhenden Uhr von IS aus



$\hookrightarrow$ Uhr ruht bei $x' = 0$, zeigt die IS'-Zeit t' an

an diesen Orten wird die t'-Anzeige abgelesen

$\longrightarrow$ definiere zwei Ereignisse

1: IS'-Uhr passiert Beobachter in IS bei $x_1 = 0$ zur Zeit $t_1 = 0$

Koordinaten $\quad x_1 = 0,\ t_1 = 0$

$\qquad\qquad x_1' = 0,\ t_1' = 0$

2: IS'-Uhr passiert Beobachter in IS bei $x_2 = vt_2$ zur Zeit t_2

Koordinaten $\quad x_2 = vt_2,\ t_2$

$\qquad\qquad x_2' = 0,\ t_2'$

spezielle Lorentz-Transformation

$\rightarrow$ für Ereignis 2: $$ct_2' = \gamma\left(ct_2 - x_2\frac{v}{c}\right) = \gamma\left(ct_2 - \frac{v^2}{c}t_2\right)$$

$$\Rightarrow \quad t_2' = t_2\,\gamma\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) = t_2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

beim Ereignis 2 zeigt die bewegte Uhr: $t_0 = t_2' - t_1' = t_2'$

= IS'-Zeitintervall zwischen E1 und E2

und eine IS-Uhr bei x_2: $t = t_2 - t_1 = t_2$

= IS-Zeitintervall zwischen E1 und E2

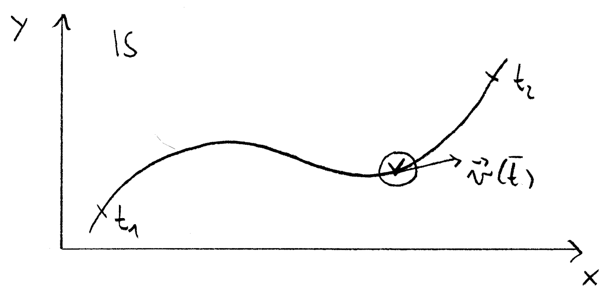
$\Rightarrow$ Zeitdilatation $$\boxed{t = t_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}$$ d.h. $t > t_0$ für $v \neq 0$

d.h. die bewegte Uhr geht nach im Vergleich zu den IS-Uhren

Achtung: die verkürzte Aussage „eine bewegte Uhr geht langsamer" ist problematisch!

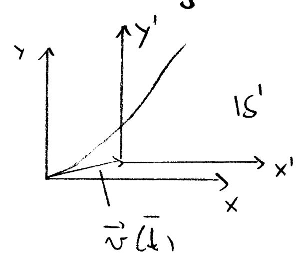
Eigenzeit

jetzt: eine Uhr bewegt sich relativ zu IS mit einer zeitabhängigen Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$



welche Zeit zeigt die bewegte Uhr an?

für $t = \bar{t}$ $\rightarrow$ führe ein IS' ein, das sich mit der Konstanten Geschwindigkeit $\vec{v}(\bar{t})$ relativ zu IS bewegt



zunächst : Zeitdilatation für Bewegung in beliebige Richtung :

$$t = \frac{t_0}{\sqrt{1 - \vec{v}^2/c^2}}$$

$\Rightarrow$ Zeitintervall für IS'-Uhr $\quad dt' = dt \sqrt{1 - \vec{v}(t)^2/c^2}$

$= d\tau$: Zeitintervall auf der bewegten Uhr

das gesamte Zeitintervall

$$\boxed{\tau = \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{1 - \frac{\vec{v}(t)^2}{c^2}}}$$

τ : Eigenzeit

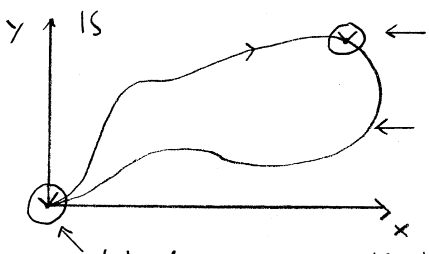
$\rightarrow$ ist eine von IS unabhängige Größe

- für $\vec{v}(t) = 0$ gilt:

$$\tau = t_2 - t_1$$

- für $\vec{v}(t) \neq 0$ gilt: $\quad \sqrt{1 - \frac{\vec{v}(t)^2}{c^2}} < 1$

$$\Rightarrow \tau < t_2 - t_1$$



$\leftarrow$ Uhr 2 : bewegt sich mit Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$

$\leftarrow$ Bahn $\vec{r}(t)$ mit $\vec{r}(t_1) = \vec{r}(t_2) = 0$

Uhr 1 : ruht in IS bei $\vec{r} = 0$

Anzeige der beiden Uhren zur IS-Zeit t_2 : $\quad$ Uhr 1 $\rightarrow t_2$

Uhr 2 $\rightarrow t_1 + \tau < t_2$

Gleichzeitigkeit

Frage: Inwieweit ist die zeitliche Reihenfolge von Ereignissen willkürlich?

betrachte zwei Ereignisse:

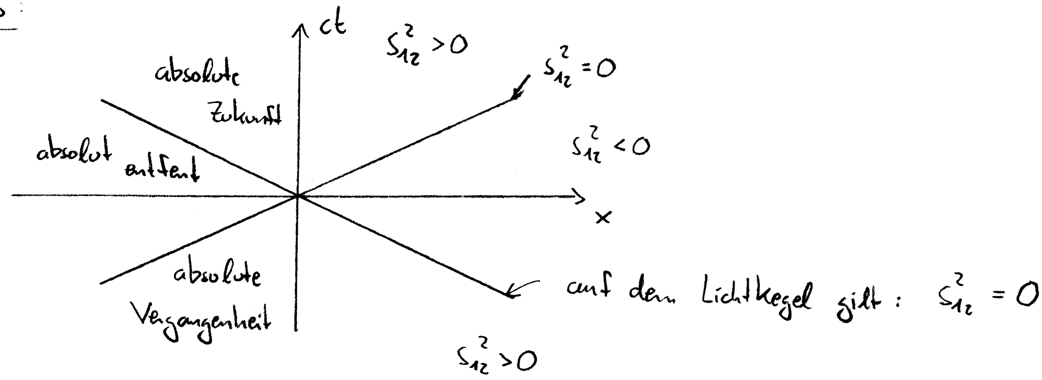
Ereignis 1 : $\begin{cases} x_1 = 0, & t_1 = 0 \\ x_1' = 0, & t_1' = 0 \end{cases}$ $\qquad$ Ereignis 2 : $\begin{cases} x_2 = x, & t_2 = t \\ x_2' = x', & t_2' = t' \end{cases}$

Abstand der beiden Ereignisse :

$$s_{12}^2 = c^2t^2 - x^2 \stackrel{!}{=} c^2t'^2 - x'^2 \begin{cases} = 0 & \text{lichtartig} \\ < 0 & \text{raumartig} \\ > 0 & \text{zeitartig} \end{cases}$$

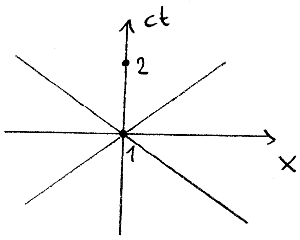
$\longrightarrow$ diese Klassifizierung ist unabhängig vom gewählten Inertial-system!

<u>Darstellung in IS:</u>



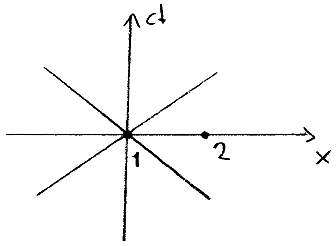
<u>Beispiele:</u>

- $x_2 = 0, \; t_2 = t$ $\quad\Rightarrow\quad s_{12}^2 = c^2t^2 > 0 \;\sim\;$ zeitartig



  - E2 auf jeden Fall nach E1
  - die beiden Ereignisse können kausal zusammenhängen

- $x_2 = x, \; t_2 = 0$ $\quad\Rightarrow\quad s_{12}^2 = -x^2 < 0 \;\sim\;$ raumartig



  - zeitliche Abfolge abhängig vom Inertialsystem
  - E1 und E2 können nicht kausal zusammenhängen

<u>A.2.4 Lorentzgruppe, Lorentztensoren</u>

allgemeine Galilei-Transformation zwischen zwei Inertialsystemen IS und IS'

$$x_i' = \sum_{j=1}^{3} \alpha_{ij} x_j - v_i t - a_i \qquad \text{und} \qquad t' = t - t_0$$

a_i, t_0 : konstante Verschiebung in Ort bzw. Zeit

$(\alpha_{ij}) = \alpha$: orthogonale Matrix, beschreibt die Drehung der räumlichen Koordinatenachsen von IS nach IS'

v_i : Relativgeschwindigkeit zwischen IS und IS'

Galilei-Transformationen bilden die Galilei-Gruppe

<u>allgemeine Lorentz-Transformation</u>

(siehe Kap. 1.2.2)

$$\boxed{x'^{\beta} = \Lambda^{\beta}_{\sigma} x^{\sigma} + b^{\beta}} \qquad \text{oder:} \quad x' = \Lambda x + b$$

homogene LT : $b = 0$

inhomogene LT : $b \neq 0$

<u>$v_i = 0$</u> : d.h. bloße Verschiebungen und Drehungen

$\longrightarrow$ keine Unterschiede zur Galilei-Transformation

Verschiebungen $\longrightarrow$ $b = (b^{\beta}) = (-ct_0, -a_i)$

Drehungen $\longrightarrow$

$$(\Lambda^{\gamma}_{\sigma}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ 0 & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ 0 & \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}$$

$\hookrightarrow$ die orthogonale Matrix α

die Bedingung $\Lambda^T \eta \Lambda = 1$ reduziert sich dann zu $\alpha^T \alpha = 1$

Unterschiede zwischen GT und LT $\rightarrow$ erst für $v_i \neq 0$

spezielle LT für $\vec{v} = (v, 0, 0)$

$$\Lambda(\vec{v}) = (\Lambda^{\beta}_{\sigma}) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma \frac{v}{c} & 0 & 0 \\ -\gamma \frac{v}{c} & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>Gruppeneigenschaften</u>

- zwei sukzessive LT ergeben wieder eine LT

$$\text{IS} \longrightarrow \text{IS}' : \; x' = \Lambda x + b \quad ; \quad \text{IS}' \longrightarrow \text{IS}'' : \; x'' = \Lambda' x' + b'$$

$$\Rightarrow \quad x'' = \Lambda'(\Lambda x + b) + b'$$
$$= \underbrace{\Lambda'\Lambda}_{=\Lambda''} x + \underbrace{\Lambda' b + b'}_{=b''} = \Lambda'' x + b''$$

damit Λ'' eine LT von $IS \to IS''$ ist, muss noch gelten:

$$\underbrace{\Lambda''^T \eta \Lambda''}_{} = \eta$$
$$\hookrightarrow \; = (\Lambda'\Lambda)^T \eta \Lambda'\Lambda = \Lambda^T \underbrace{\Lambda'^T \eta \Lambda'}_{=\eta} \Lambda = \Lambda^T \eta \Lambda = \eta \quad \text{ok}$$

- Assoziativität: $\Lambda(\Lambda'\Lambda'') = (\Lambda\Lambda')\Lambda''$

  folgt aus der Assoziativität der Matrixmultiplikation

- Eins-Element: $\Lambda = \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Einheitsmatrix

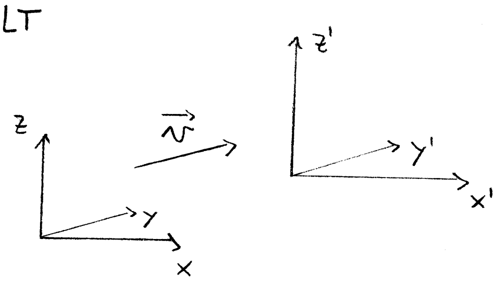
- inverses Element: erhält man durch $\alpha \to \alpha^T$, $\vec{v} \to -\vec{v}$

Poincaré-Gruppe: Gruppe der inhomogenen LT

Lorentz-Gruppe: Gruppe der homogenen LT

<u>beliebige Richtung von $\vec{v}$</u>

die Achsen von IS und IS' seien parallel



ohne Beweis:

$$\Lambda(\vec{v}) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v_1/c & -\gamma v_2/c & -\gamma v_3/c \\ -\gamma v_1/c & & & \\ -\gamma v_2/c & & \delta_{ij} + \frac{v_i v_j(\gamma-1)}{v^2} & \\ -\gamma v_3/c & & & \end{pmatrix}$$

mit $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \vec{v}^2/c^2}}$$

<u>allgemeine Lorentz-Transformation:</u>

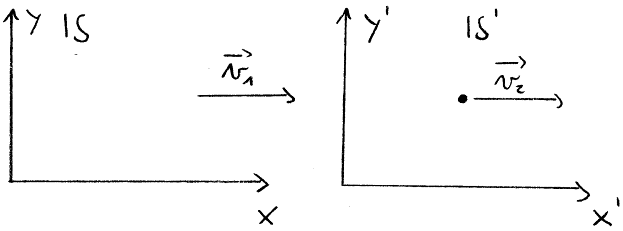
$$\boxed{x' = \Lambda(\alpha)\Lambda(\vec{v})x + b}$$

$\Lambda(\alpha)$: Drehung der räumlichen Achsen

b: konstante Raum-Zeit Verschiebung

Additionstheorem für die Geschwindigkeiten

in IS' bewegt sich ein Teilchen mit der Geschwindigkeit $\vec{v}_2 = (v_2, 0, 0)$



welche Geschwindigkeit hat das Teilchen in IS? $(\rightarrow V)$

$\longrightarrow$ führe ein IS'' ein, das sich relativ zu IS' mit $\vec{v}_2$ bewegt

$\Rightarrow$ LT von IS zu IS'':

$$\Lambda(\vec{V}) = \Lambda(\vec{v}_2)\,\Lambda(\vec{v}_1)$$

für $\vec{v}_1 = (v_1, 0, 0)$ folgt $\vec{V} = (V, 0, 0)$ und

$$\Lambda(V) = \begin{pmatrix} \cosh \psi_2 & -\sinh \psi_2 \\ -\sinh \psi_2 & \cosh \psi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh \psi_1 & -\sinh \psi_1 \\ -\sinh \psi_1 & \cosh \psi_1 \end{pmatrix} = \ldots$$

mit $\psi_i = \operatorname{artanh} \frac{v_i}{c}$ $\quad \psi$: Rapidität

es gilt:
$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$$
$$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$$

$$\ldots = \begin{pmatrix} \cosh(\psi_1 + \psi_2) & -\sinh(\psi_1 + \psi_2) \\ -\sinh(\psi_1 + \psi_2) & \cosh(\psi_1 + \psi_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \psi & -\sinh \psi \\ -\sinh \psi & \cosh \psi \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\psi = \psi_1 + \psi_2}$$

jetzt für die Geschwindigkeiten

$$\frac{V}{c} = \tanh \psi = \tanh(\psi_1 + \psi_2) = \frac{\tanh \psi_1 + \tanh \psi_2}{1 + \tanh \psi_1 \tanh \psi_2}$$

$\hookrightarrow$ Additionstheorem für den tangens hyperbolicus

daraus folgt das Additionstheorem für die Geschwindigkeiten:

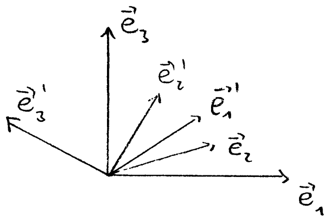
$$\boxed{V = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}}$$

falls $\vec{v}_1 \parallel \vec{v}_2$

Tensoren

a) orthogonale Transformationen

Drehung eines Koordinatensystems von k nach k'



Basis in k : $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$

in k' : $\vec{e}_1\,', \vec{e}_2\,', \vec{e}_3\,'$

Darstellung eines Vektors $\vec{r}$ in k : $\vec{r} = \sum_{i=1}^{3} x_i \vec{e}_i$

in k' : $\vec{r} = \sum_{i=1}^{3} x_i' \vec{e}_i\,'$

es gilt : $x_j' = \sum_{i=1}^{3} d_{ji} x_i$ mit $d_{ji} = \vec{e}_j\,' \cdot \vec{e}_i$ $(= \cos\varphi_{ij})$

$x_j = \sum_{i=1}^{3} d_{ij} x_i'$

$\rightarrow$ Transformation der Komponenten des Vektors beim Übergang $k \rightarrow k'$

die d_{ij} sind die Komponenten der Drehmatrix D

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix}$$

schreibe $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ $\vec{x}\,' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \vec{x}\,' &= D\vec{x} \\ \vec{x} &= D^t \vec{x}\,' \end{aligned}}$$

es gilt: $DD^t = \mathbb{1}$

$\Rightarrow D^{-1} = D^t$

$\rightarrow$ orthogonale Transformation

das Skalarprodukt ist invariant unter orthogonalen Transformationen

$\rightarrow$ betrachte zwei Vektoren : $\vec{a}, \vec{b}$ in k , $\vec{a}\,', \vec{b}\,'$ in k'

$\vec{a}\,' \cdot \vec{b}\,' = \sum_{i=1}^{3} a_i' b_i'$ mit $a_i' = \sum_{k=1}^{3} d_{ik} a_k$

$b_i' = \sum_{l=1}^{3} d_{il} b_l$

$$= \sum_{kl} \underbrace{\sum_i d_{ik} d_{il}}_{=\delta_{kl}} a_k b_l = \sum_k a_k b_k = \vec{a} \cdot \vec{b}$$

das bedeutet : – Winkel zwischen zwei Vektoren sind erhalten

– Norm : $|\vec{r}| = \sqrt{\vec{r}\cdot\vec{r}}$ ist erhalten

im folgenden : Vektor = Tensor 1. Stufe

↳ definiert durch das Transformationsverhalten unter orthogonalen Transformationen

b) Definition : Tensoren

Tensor k-te Stufe in einem n-dimensionalen Raum (hier n = 3)

ist ein 3^k - Tupel von Zahlen

$$\underbrace{T_{i_1, i_2, \ldots, i_k}}_{\text{die Komponenten des Tensors}} \qquad i_1 = 1,2,3 \; ; \; i_2 = 1,2,3 \; , \ldots$$

die sich beim Übergang $k \to k'$ folgendermaßen transformieren :

$$\boxed{T'_{i_1 i_2 \ldots i_k} = \sum_{l_1=1}^{3} \sum_{l_2=1}^{3} \ldots \sum_{l_k=1}^{3} d_{i_1 l_1} d_{i_2 l_2} \cdot \ldots \cdot d_{i_k l_k} T_{l_1 l_2 \ldots l_k}}$$

- Tensor 0ter Stufe

= Skalar : nicht indizierte Größe T mit

$$\boxed{T' = T}$$ ändert sich nicht beim Übergang $k \to k'$

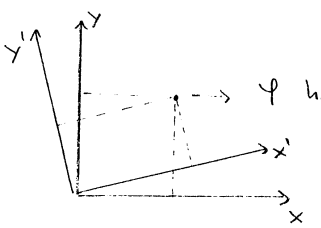
Beispiele : – Skalarprodukt (siehe oben)

– skalare Felder

↳ Erweiterung des Tensorbegriffs auf Tensorfelder

$\varphi(\vec{r})$ ist ein skalares Feld (= Tensorfeld 0ter Stufe), wenn

$$\varphi'(\vec{r}\,') = \varphi(\vec{r}) \qquad \text{mit } \vec{r}\,' = D\vec{r}$$, d.h. das Argument muss mittransformiert werden



→ φ hat denselben Wert an diesem Punkt im Raum in k ($\to \varphi(\vec{r})$) und k' ($\to \varphi'(\vec{r}\,')$)

- Tensor 1.ter Stufe

  = Vektor $\boxed{F_i' = \sum_{\ell=1}^{3} d_{i\ell} F_\ell}$

  Beispiele : – Vektorprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$

  – Vektorfelder $\vec{A}(\vec{r}) \longrightarrow A_i'(\vec{r}') = \sum_{\ell=1}^{3} d_{i\ell} A_\ell(\vec{r})$

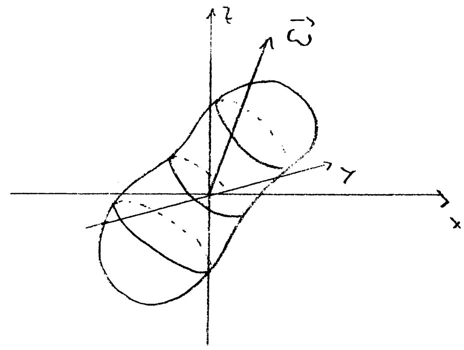
- Tensor 2te Stufe

  $$\boxed{F_{ij}' = \sum_{k=1}^{3} \sum_{\ell=1}^{3} d_{ik} d_{j\ell} F_{k\ell}}$$

  $\longrightarrow$ Darstellung als quadratische (3×3) Matrix : $(F_{ij}) = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{pmatrix}$

C) der Trägheitstensor

$\longrightarrow$ Kinetische Energie eines starren Körpers bei Rotation um Achse $\vec{\omega}$

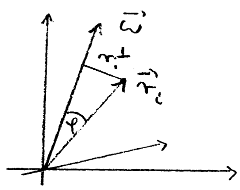


speziell : Schwerpunkt im Koordinatenursprung

$$\longrightarrow \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i(t) = \vec{0}$$

Rotation der einzelnen Massenpunkte des starren Körpers um die Achse $\vec{\omega}$:

$$\vec{v}_i(t) = \dot{\vec{r}}_i(t) = \vec{\omega} \times \vec{r}_i(t)$$



$$\longrightarrow \underbrace{|\vec{v}_i(t)|}_{v_i} = \underbrace{|\vec{\omega}|}_{= \omega} \underbrace{|\vec{r}_i| \sin\varphi_i}_{= r_i^\perp}$$

Umlaufzeit : $T = \frac{2\pi r_i^\perp}{v_i} = \frac{2\pi}{\omega}$ unabhängig von $r_i^\perp$

Kinetische Energie (Rotationsenergie) : $T_R = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,2}$

$$\rightarrow \quad T_R = \frac{1}{2}\sum_i m_i \underbrace{(\vec{\omega}\times\vec{r}_i)^2}_{= \omega^2 r_i^2 - (\vec{\omega}\cdot\vec{r}_i)^2}$$

mit $\vec{\omega} = \begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\\ \omega_3\end{pmatrix} \quad \vec{r}_i = \begin{pmatrix}x_{i1}\\ x_{i2}\\ x_{i3}\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \quad T_R = \frac{1}{2}\sum_i m_i\left[(\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2)(x_{i1}^2+x_{i2}^2+x_{i3}^2) - (\omega_1 x_{i1}+\omega_2 x_{i2}+\omega_3 x_{i3})^2\right]$$

Ordnen nach den Komponenten von $\vec{\omega}$ ergibt:

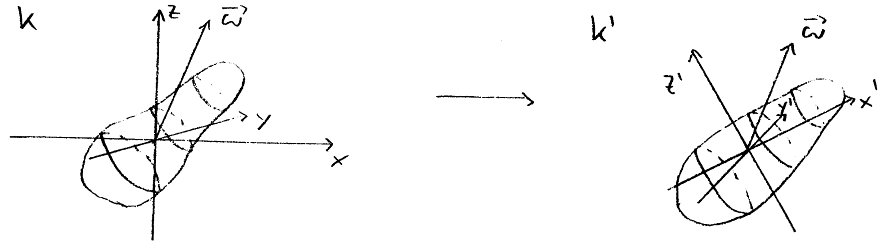
$$\boxed{T_R = \frac{1}{2}\sum_{l,m=1}^{3} J_{lm}\,\omega_l\,\omega_m} \quad \text{mit} \quad \boxed{J_{lm} = \sum_i m_i\left(\vec{r}_i^{\,2}\,\delta_{lm} - x_{il}x_{im}\right)}$$

die J_{lm} sind die Komponenten des Trägheitstensors J $\longrightarrow$ Tensor 2. Stufe

$$J = (J_{lm}) = \begin{pmatrix} \sum_i m_i(x_{i2}^2+x_{i3}^2) & -\sum_i m_i x_{i1}x_{i2} & -\sum_i m_i x_{i1}x_{i3} \\ -\sum_i m_i x_{i2}x_{i1} & \sum_i m_i(x_{i1}^2+x_{i3}^2) & -\sum_i m_i x_{i2}x_{i3} \\ -\sum_i m_i x_{i3}x_{i1} & -\sum_i m_i x_{i3}x_{i2} & \sum_i m_i(x_{i1}^2+x_{i2}^2) \end{pmatrix}$$

warum Trägheits-„Tensor"?

$\rightarrow$ betrachte Drehung des Koordinatensystems von K nach K':



$\Rightarrow \quad \vec{\omega} \rightarrow \vec{\omega}'$

$\quad\;\; \vec{r} \rightarrow \vec{r}\,'$

wie transformieren sich die Komponenten des Trägheitstensors?

$$J_{lm} \longrightarrow J'_{lm}$$

es gilt: die kinetische Energie ist unabhängig vom Koordinatensystem

$$\rightarrow \quad T'_R = \frac{1}{2}\sum_{l,m=1}^{3} J'_{lm}\,\omega'_l\,\omega'_m \overset{!}{=} T_R$$

mit $\omega'_l = \sum_{i=1}^{3} d_{li}\,\omega_i$, $\omega'_m = \sum_{j=1}^{3} d_{mj}\,\omega_j$ folgt :

$$T'_R = \frac{1}{2} \sum_{ij} \underbrace{\sum_{lm} d_{li}\, d_{mj}\, J'_{lm}} \omega_i\, \omega_j = \ldots$$

$$= \sum_{lm} d^t_{il}\, d^t_{jm}\, J'_{lm} \underset{\downarrow}{=} J_{ij}$$

Falls J Tensor 2. Stufe

$$\ldots = \frac{1}{2} \sum_{ij} J_{ij}\, \omega_i\, \omega_j = T_R \qquad \text{ok.}$$

Beispiel: $v_2 = c$

$$\Rightarrow \quad V = \frac{v_1 + c}{1 + \frac{v_1}{c}} = c \quad \text{unabhängig von } v_1 \, !$$

Lorentztensoren

„normale" Tensoren $\longrightarrow$ 3-Tensoren : definiert durch ihr Verhalten unter orthogonalen Transformationen

hier: Lorentztensoren = 4-Tensoren : definiert durch ihr Verhalten unter Lorentztransformationen

betrachte den vierdimensionalen Raum, der durch die Kartesischen Koordinatenachsen für die Größen

$$(x^\alpha) = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$$

aufgespannt wird.

Wegelement : $ds^2 = \eta_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta$

ist Kovariant (forminvariant) unter Lorentztransformationen.

$\longrightarrow$ Minkowski-Raum

Vergleich mit dem dreidimensionalen Raum :

$$dl^2 = \sum_{i=1}^{3} (dx_i)^2 \quad \text{ist Kovariant unter orthogonalen Transformationen}$$

Relativitätsprinzip (Einstein):

$\longrightarrow$ die Form physikalischer Gesetze darf nicht vom IS abhängen

$\Rightarrow$ die Gesetze sind als 4-Tensorgleichungen zu formulieren !

Definition: Lorentztensor 1. Stufe, auch Lorentzvektor, Vierervektor

$\longrightarrow$ eine einfach indizierte Größe V^α, die sich wie die Koordinaten x^α transformiert:

$$\boxed{V'^\beta = \Lambda^\beta_{\ \alpha} V^\alpha} \quad \hat{=} \quad V'^\beta = \sum_{\alpha=0}^{3} \Lambda^\beta_{\ \alpha} V^\alpha$$

vgl.: $x'^\beta = \Lambda^\beta_{\ \alpha} x^\alpha \; [+ \, b^\beta]$

- Lorentztensor N-ter Stufe, auch 4-Tensor N-ter Stufe

  → eine N-fach indizierte Größe, die sich wie

$$\boxed{T'^{\alpha_1 \dots \alpha_N} = \Lambda^{\alpha_1}_{\ \beta_1} \dots \Lambda^{\alpha_N}_{\ \beta_N} T^{\beta_1 \dots \beta_N}}$$ transformiert

$$\hookrightarrow T'^{\alpha_1 \dots \alpha_N} = \sum_{\beta_1=0}^{3} \sum_{\beta_2=0}^{3} \dots \sum_{\beta_N=0}^{3} \Lambda^{\alpha_1}_{\ \beta_1} \Lambda^{\alpha_2}_{\ \beta_2} \dots \Lambda^{\alpha_N}_{\ \beta_N} T^{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_N}$$

- Lorentzskalar, 4-Tensor 0-ter Stufe

  → eine nicht indizierte Größe, die unter LT invariant ist

$$\boxed{S' = S}$$

Beispiele: l_0 → Eigenlänge eines Stabs
ds^2 → Wegelement
$d\tau$ → Eigenzeit

die $T^{\alpha\beta\dots}$ heißen Kontravariante Komponenten des Tensors

→ Konstruktion der Kovarianten Komponenten $T_{\alpha\beta\dots}$:

$$\boxed{V_\beta = \eta_{\beta\alpha} V^\alpha}$$

z.B.: $$x_\beta = \eta_{\beta\alpha} x^\alpha = \sum_{\alpha=0}^{3} \eta_{\beta\alpha} x^\alpha = \eta_{\beta\beta} x^\beta$$

$$\Rightarrow (x_\beta) = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (x^0, -x^1, -x^2, -x^3) = (ct, -x, -y, -z)$$

für einen Lorentztensor 2-ter Stufe:

$$T_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\alpha'} \eta_{\beta\beta'} T^{\alpha'\beta'}$$

<u>Rechenregeln für Tensoren:</u>

1. Addition: S und T seien Tensoren Nter Stufe, $a, b \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow a S^{\alpha_1 \dots \alpha_N} + b T^{\alpha_1 \dots \alpha_N}$$ ebenfalls ein Tensor Nter Stufe

2. Multiplikation:

$$S^{\alpha_1 \dots \alpha_N} T^{\beta_1 \dots \beta_N}$$ ist ein Tensor der Stufe $N + M$

Lorentztensorfelder

die Funktion $S(x)$, mit $x = (x^\alpha)$, ist ein (Lorentz-) Skalarfeld, falls

$$S'(x') = S(x) \qquad \text{mit} \quad x' = (x'^\alpha) = (\Lambda^\alpha_\beta x^\beta)$$

analog:

$$V'^\alpha(x') = \Lambda^\alpha_\beta V^\beta(x) \quad \rightarrow \text{Vektorfeld}$$

$$T'^{\alpha\beta}(x') = \Lambda^\alpha_\gamma \Lambda^\beta_\delta T^{\gamma\delta}(x) \quad \rightarrow \text{Tensorfeld}$$

A.2.5 relativistische Energie

das zweite Newtonsche Axiom lautet:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_N$$

die relativistische Verallgemeinerung lautet:

$$\boxed{m \frac{du^\alpha}{d\tau} = F^\alpha}$$

relativistische Bewegungsgleichung

m: Ruhmasse

$$d\tau = dt \sqrt{1 - \vec{v}(t)^2/c^2} = \frac{dt}{\gamma} \qquad \tau: \text{Eigenzeit}$$

(u^α): 4-Geschwindigkeit

definiert als: $$u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau}$$

für u^α gilt:

$$(u^\alpha) = \gamma\left(\frac{dx^0}{dt}, \frac{dx^1}{dt}, \frac{dx^2}{dt}, \frac{dx^3}{dt}\right) = \gamma(c, v^1, v^2, v^3)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}(c, \vec{v})$$

Definition: 4-Impuls

$$(p^\alpha) = (m u^\alpha) = \left(\frac{mc}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dp^\alpha}{d\tau} = F^\alpha$$

Beispiel: Lorentzkraft $\rightarrow$ $\boxed{(F^\alpha) = \gamma\left(q\,\frac{\vec{v}\cdot\vec{E}}{c}, q\left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}\right)\right)}$

Herleitung siehe Fließbach, Mechanik, Kap. 38

für die 0-Komponente der Bewegungsgleichung gilt dann

$$m \frac{du^0}{d\tau} = \gamma q \frac{\vec{v}\cdot\vec{E}}{c}$$

$$m\gamma \frac{d}{dt} \frac{c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{\gamma q}{c} \vec{v}\cdot\vec{E} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \frac{mc^2}{\sqrt{1-v(t)^2/c^2}} = q\,\vec{v}\cdot\vec{E} \qquad (*)$$

Annahme: das Teilchen bewegt sich in einem elektostatischen Feld

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi(\vec{r})$$

$\Rightarrow$ potenzielle Energie $q\Phi(\vec{r})$

für die rechte Seite von $(*)$ gilt

$$q\,\vec{v}\cdot\vec{E} = -q\frac{d\vec{r}}{dt}\cdot\vec{\nabla}\Phi = -q\frac{d}{dt}\Phi(\vec{r},t)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\underbrace{\left[\frac{mc^2}{\sqrt{1-v(t)^2/c^2}} + q\,\Phi(\vec{r},t)\right]}_{=\,\text{const.}} = 0$$

Erhaltungsgröße

also $\quad \gamma mc^2 + q\Phi = \text{const.}$

oder:

$$\boxed{\underbrace{mc^2}_{\text{Ruheenergie } E_0} + \underbrace{mc^2(\gamma-1)}_{\text{Kinetische Energie}} + \underbrace{q\,\Phi(\vec{r})}_{\text{potenzielle Energie}} = \text{const.}}$$

die ersten beiden Terme

$$\boxed{E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}}$$

relativistische Energie

für $v \ll c$ gilt $\quad \gamma = \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \mathcal{O}\left(\frac{v^4}{c^4}\right)$

$$\Rightarrow \quad mc^2(\gamma-1) = mc^2\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{2}mv^2$$

$$\Rightarrow \quad E \,\hat{=}\, mc^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

relativistische Energie - Impuls - Beziehung

Def. : relativistische Impuls : $\boxed{\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}}$

$\longrightarrow$ die Komponenten des 4 - Impulses : $(p^\alpha) = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right)$

Energie - Impuls - Beziehung $\boxed{E^2 = m^2 c^4 + c^2 p^2}$ mit $p = |\vec{p}|$

Herleitung : $E^2 = \frac{m^2 c^4}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{m^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \left(c^4 + c^2 v^2 - c^2 v^2 \right) =$

$$= \frac{m^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \left(c^2 v^2 + c^4 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\right) = m^2 c^4 + c^2 \underbrace{\frac{m^2 v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}}}_{= p^2} \quad \checkmark$$

nicht relativistische Grenzfall : $p \ll mc$

$$\longrightarrow \quad E = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 p^2} = mc^2 \sqrt{1 + \frac{p^2}{m^2 c^2}} \cong mc^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{p^2}{m^2 c^2}\right)$$

$$= mc^2 + \frac{p^2}{2m}$$

ultrarelativistische Grenzfall : $p \gg mc$

$$\longrightarrow \quad E = c\,p \sqrt{1 + \frac{m^2 c^2}{p^2}} \cong cp \left(1 + \frac{1}{2} \frac{m^2 c^2}{p^2}\right)$$

$$= cp + \frac{1}{2} \frac{m^2 c^3}{p}$$

Äquivalenz von Masse und Energie

betrachte ein System von N unabhängigen Teilchen

Gesamtenergie : $E = \sum_{\nu=1}^{N} E_\nu = \underbrace{\sum_{\nu=1}^{N} E_{kin,\nu}}_{\text{gesamte kinetische Energie } E_{kin,g}} + \underbrace{\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu c^2}_{\text{gesamte Ruheenergie } E_{0,g}} = \text{const.}$ d.h. E ist eine Erhaltungsgröße

aber: $E_{kin,g}$ und $E_{0,g}$ sind keine Erhaltungsgrößen!

$\Rightarrow$ die Umwandlung von Masse in Energie (und umgekehrt) ist möglich

A.3 Lorentz-Invarianz des Elektromagnetismus

die Maxwellgleichungen gelten in allen Inertialsystemen

formal: ihre Form ändert sich nicht unter Lorentztransformationen

$\longrightarrow$ sie sind forminvariant (= kovariant)

zunächst: Lorentzinvarianz der Ladung

Kontinuitätsgleichung :
$$\boxed{\frac{\partial \rho(\vec{r},t)}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{j}(\vec{r},t) = 0}$$

wie üblich: $(x^\alpha) = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z) = (ct, \vec{r})$

ähnlich für die partiellen Ableitungen :

$$\boxed{(\partial_\alpha) = \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right)}$$

d.h. $(\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3) = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3}\right)$

$$= \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

Konstruktion der kovarianten Komponenten von X :

$$x_\alpha = \eta_{\beta\alpha} x^\beta \quad \text{mit} \quad (\eta_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad (x_\alpha) = (ct, -x, -y, -z) = (ct, -\vec{r})$$

... und der Kontravarianten Komponenten von ∂:

$$\partial^\alpha = \eta^{\alpha\beta} \partial_\beta \qquad \text{mit} \quad \eta^{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$$

$$\Rightarrow \quad (\partial^\alpha) = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial z} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \right)$$

<u>Definition:</u> Viererstromdichte j^α

$$\boxed{(j^\alpha) = (c\varrho, j_x, j_y, j_z)}$$

die Kontinuitätsgleichung lässt sich dann in folgende Form schreiben

$$\longrightarrow \quad \boxed{\partial_\alpha j^\alpha(x) = 0}$$

Beweis: $\partial_\alpha j^\alpha(x) = \sum_{\alpha=0}^{3} \partial_\alpha j^\alpha(x) = \sum_{\alpha=0}^{3} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} j^\alpha(x)$

$$= \frac{\partial}{\partial x^0} j^0(x) + \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} j^\alpha(x) = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} c\varrho(\vec{r},t) + \frac{\partial}{\partial x} j_x(\vec{r},t)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y} j_y(\vec{r},t) + \frac{\partial}{\partial z} j_z(\vec{r},t) = \frac{\partial}{\partial t} \varrho(\vec{r},t) + \vec{\nabla}\cdot\vec{j}(\vec{r},t) \qquad \text{ok.}$$

die Kontinuitätsgleichung folgt direkt aus den Maxwellgleichungen (siehe Blatt 1, Aufgabe 5)

$\Rightarrow \quad \partial_\alpha j^\alpha(x) = 0$ gilt in jedem IS

$IS \rightarrow IS'$: $\quad \partial'_\alpha j'^\alpha(x') = 0 \qquad \partial_\alpha j^\alpha$ ist ein Lorentzskalar

$j^\alpha(x)$ ist ein Lorentz-Vektorfeld (4-Vektorfeld), also

$$\boxed{j'^\alpha(x') = \Lambda^\alpha{}_\beta \, j^\beta(x)}$$

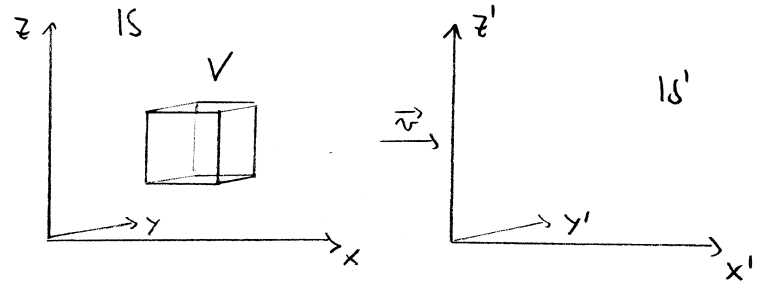
<u>Beispiel:</u> sei $(j^\alpha) = (c\varrho, \vec{0})$ d.h. kein Strom, nur Ladung

$$(\Lambda^\alpha{}_\beta) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\frac{v}{c} & 0 & 0 \\ -\gamma\frac{v}{c} & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d.h. $IS \longrightarrow IS'$

$\vec{v} = (v, 0, 0)$

zu beachten: $\rho(\vec{r},t)$ ist eine Ladungsdichte $\Rightarrow$ betrachte die Ladung in einem Volumen $V \to q$



hier: $\rho(\vec{r},t) = \rho = \text{const.}$

$\Rightarrow \quad q = \rho V$

berechne jetzt die Ladung q' in diesem Volumen von IS' aus betrachtet

1.
$$\begin{pmatrix} j'^0 \\ j'^1 \\ j'^2 \\ j'^3 \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} c\rho \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma c \rho \\ -\gamma v \rho \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

die Ladungsdichte ρ' in IS' ergibt sich aus $j'^0 = c\rho' \overset{!}{=} \gamma c \rho$

$\Rightarrow \quad \rho' = \gamma \rho$

2. Längenkontraktion $\Rightarrow \quad V' = \frac{V}{\gamma}$

und damit folgt: $\quad q' = \rho' V' = \gamma \rho \frac{V}{\gamma} = \rho V = q$

die Ladung q ist ein Lorentzskalar

außerdem: $\quad j'^1 = j'_x = -\gamma v \rho = -v\rho'$

d.h. Strom in $-x$ Richtung

<u>Kovariante Maxwellgleichungen</u>

zunächst für die Potentiale

$$\boxed{\Box \vec{A}(\vec{r},t) = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}(\vec{r},t) \,, \quad \Box \Phi(\vec{r},t) = -4\pi \rho(\vec{r},t)}$$

mit dem d'Alembert-Operator $\Box = \Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$

<u>Definition</u> Viererpotential

$$\boxed{A^\alpha = (\phi, A_x, A_y, A_z)}$$

daraus folgen die kovarianten Maxwellgleichungen für die Potentiale:

$$\boxed{\Box A^\alpha(x) = -\frac{4\pi}{c} j^\alpha(x)}$$

es gilt: $-\Box = \partial_\beta \partial^\beta$

denn: $\partial_\beta \partial^\beta = \sum_{\beta=0}^{3} \partial_\beta \partial^\beta = \sum_{\beta=0}^{3} \frac{\partial}{\partial x^\beta}\frac{\partial}{\partial x_\beta} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

$$= \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$$

<u>jetzt</u>: Kovariante Form der Maxwellgleichungen für die Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$

<u>Definition</u>: der antisymmetrische Feldstärketensor $F^{\alpha\beta}$

$$\boxed{F^{\alpha\beta} = \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha}$$

antisymmetrisch, da $F^{\alpha\beta} = -F^{\beta\alpha}$

für die Komponenten des Feldstärketensors gilt:

$$(F^{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

<u>Beweis</u>:

- für die Diagonalelemente gilt $F^{\alpha\alpha} = \partial^\alpha A^\alpha - \partial^\alpha A^\alpha = 0$

verwende nun $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \longrightarrow E_x = -\frac{\partial}{\partial x}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t}$ etc.

- $F^{01} = \partial^0 A^1 - \partial^1 A^0 = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} A_x - \left(-\frac{\partial}{\partial x}\phi\right) = -E_x$ ok

F^{02}, F^{03} analog

außerdem: $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \Rightarrow B_z = \frac{\partial}{\partial x} A_y - \frac{\partial}{\partial y} A_x$

- $F^{12} = \partial^1 A^2 - \partial^2 A^1 = -\frac{\partial}{\partial x} A_y - \left(-\frac{\partial}{\partial y} A_x\right) = -B_z$ ok
- $F^{13} = \partial^1 A^3 - \partial^3 A^1 = -\frac{\partial}{\partial x} A_z + \frac{\partial}{\partial z} A_x = B_y$ ok und F^{23} analog

Übergang zum kovarianten Feldstärketensor $F_{\alpha\beta}$

$$F_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\gamma} \eta_{\beta\delta} F^{\gamma\delta} = \sum_{\gamma=0}^{3} \sum_{\delta=0}^{3} \eta_{\alpha\gamma} \eta_{\beta\delta} F^{\gamma\delta}$$

$$= \underbrace{\eta_{\alpha\alpha} \eta_{\beta\beta}}_{\text{ergibt } +1 \text{ oder } -1} F^{\alpha\beta} \Rightarrow (F_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

Lorenzeichung

läßt sich schreiben als $\boxed{\partial_\alpha A^\alpha(x) = 0}$

$$\partial_\alpha A^\alpha = \partial_0 A^0 + \sum_{\alpha=1}^{3} \partial_\alpha A^\alpha = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \phi + \frac{\partial}{\partial x} A_x + \frac{\partial}{\partial y} A_y + \frac{\partial}{\partial z} A_z$$

$$\hat{=} \quad \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$$

(siehe Skript J. Krug Gl. (4.30))

Ausgangspunkt seien jetzt die Maxwellgleichungen für die Potentiale

$$\partial_\beta \partial^\beta A^\alpha = \frac{4\pi}{c} j^\alpha \qquad (*)$$

füge auf der linken Seite den Term $-\partial_\beta \partial^\alpha A^\beta$ hinzu

$$\partial_\beta \partial^\alpha A^\beta = \partial^\alpha \underbrace{\partial_\beta A^\beta}_{=0} = 0 \quad \text{ok}$$

aus (*) folgt dann:

$$\partial_\beta \partial^\beta A^\alpha - \partial_\beta \partial^\alpha A^\beta = \frac{4\pi}{c} j^\alpha$$

$$\underbrace{\partial_\beta \left(\partial^\beta A^\alpha - \partial^\alpha A^\beta \right)}_{= F^{\beta\alpha}} = \frac{4\pi}{c} j^\alpha$$

daraus folgen die vier inhomogenen Maxwellgleichungen für $F^{\alpha\beta}$

$$\boxed{\partial_\beta F^{\beta\alpha} = \frac{4\pi}{c} j^\alpha}$$

entspricht den Maxwellgleichungen in der bekannten Form,

denn:

$\alpha = 0$:

$$\partial_\beta F^{\beta 0} = \sum_{\beta=1}^{3} \partial_\beta F^{\beta 0} = \frac{\partial}{\partial x} E_x + \frac{\partial}{\partial y} E_y + \frac{\partial}{\partial z} E_z = \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$$

$$\stackrel{!}{=} \frac{4\pi}{c} j^0 = 4\pi \rho \qquad \text{ok.}$$

$\alpha = 1$:

$$\partial_\beta F^{\beta 1} = \underbrace{\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(-E_x) + \frac{\partial}{\partial y} B_z + \frac{\partial}{\partial z}(-B_y)}_{\text{die } x\text{-Komponente von } -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{E} + \vec{\nabla} \times \vec{B}} \stackrel{!}{=} \frac{4\pi}{c} j^1 = \frac{4\pi}{c} j_x \qquad \text{ok}$$

$\alpha = 2,3$ analog

Definition: der duale Feldstärketensor $\tilde{F}$

$$\boxed{\tilde{F}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\gamma\delta}}$$

$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$: „total antisymmetrische Pseudotensor" auch Levi-Civitá-Tensor

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = \begin{cases} +1 & \text{falls } (\alpha,\beta,\gamma,\delta) \text{ gerade Permutation von } (0,1,2,3) \\ -1 & \text{falls } (\alpha,\beta,\gamma,\delta) \text{ ungerade Permutation von } (0,1,2,3) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

z.B.:

$$\tilde{F}^{01} = \frac{1}{2} \varepsilon^{01\gamma\delta} F_{\gamma\delta} = \frac{1}{2}\Big(\underbrace{\varepsilon^{0123}}_{=1} \underbrace{F_{23}}_{-B_x} + \underbrace{\varepsilon^{0132}}_{=-1} \underbrace{F_{32}}_{B_x} \Big) = -B_x$$

insgesamt:

$$\left(\tilde{F}^{\alpha\beta} \right) = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & E_z & -E_y \\ B_y & -E_z & 0 & E_x \\ B_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix}$$

damit lassen sich die homogenen Maxwellgleichungen darstellen

$$\partial_\beta \tilde{F}^{\beta\alpha} = 0 \qquad \begin{cases} \alpha = 0 : & \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \\ \alpha = i = 1,2,3 : & \vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0 \end{cases}$$

=> die Kovarianten Maxwellgleichungen für die physikalischen Felder $F, \tilde{F}$

$$\boxed{\partial_\beta F^{\beta\alpha} = \frac{4\pi}{c} j^\alpha \,, \quad \partial_\beta \tilde{F}^{\beta\alpha} = 0}$$

Vorteile dieser Darstellung der Maxwellgln. (im Gegensatz zu $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0, \dots$)

a) einfachere / Kompaktere Form

b) Struktur spiegelt die Kovarianz gegenüber Lorentztransformationen wider

zu b)

Behauptung: $(F^{\alpha\beta})$ ist ein Lorentztensor, d.h. beim Übergang IS $\to$ IS' gilt

$$F'^{\alpha\beta} = \Lambda^\alpha_{\ \gamma}\Lambda^\beta_{\ \delta} F^{\gamma\delta}$$

Beweis:

- (∂^α) ist ein Lorentzvektor => $\Box = \partial_\alpha \partial^\alpha$ ist ein Lorentzskalar
- $\partial_\alpha j^\alpha = 0$ (Kontinuitätsgleichung) gilt in jedem IS
  - => $\partial_\alpha j^\alpha$ ist ein Lorentzskalar
  - => (j^α) ist ein Lorentzvektor
- $\underbrace{\Box A^\alpha}$ $= -\frac{4\pi}{c} j^\alpha$
  - $\hookrightarrow$ ein Lorentzvektor => (A^α) ist ein Lorentzvektor
- $F^{\alpha\beta} = \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha$ => $(F^{\alpha\beta})$ ist ein Lorentztensor 2ter Stufe

jetzt: wir nehmen an, dass in einem bestimmten IS gilt:

$$\partial_\beta F^{\beta\alpha} = \frac{4\pi}{c} j^\alpha \quad \Rightarrow \quad \text{in IS' gilt:} \quad \partial'_\beta F'^{\beta\alpha} = \frac{4\pi}{c} j'^\alpha$$

Beweis: $\partial_\beta F^{\beta\alpha} = \frac{4\pi}{c} j^\alpha \quad \Big| \cdot \Lambda^\gamma{}_\alpha$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\partial_\beta}_{(*)} \Lambda^\gamma{}_\alpha F^{\beta\alpha} = \frac{4\pi}{c} \underbrace{\Lambda^\gamma{}_\alpha j^\alpha}_{= j'^\gamma}$$

da (j^α) Lorentzvektor

$(*)$: $= \underbrace{\eta_{\beta\delta}}\, \partial^\delta$ wg Konstruktion der kovarianten Komponenten

$= \eta_{\xi\nu} \Lambda^\xi{}_\beta \Lambda^\nu{}_\delta$ wg $\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\partial^\delta \eta_{\xi\nu} \Lambda^\nu{}_\delta}_{(**)} \underbrace{\Lambda^\xi{}_\beta \Lambda^\gamma{}_\alpha F^{\beta\alpha}}_{= F'^{\xi\gamma}} = \frac{4\pi}{c} j'^\gamma ,$$

da $(F^{\beta\alpha})$ Lorentztensor

$(**)$: $= \eta_{\xi\nu} \underbrace{\Lambda^\nu{}_\delta \partial^\delta}_{= \partial'^\nu}$ da (∂^δ) Lorentzvektor

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\eta_{\xi\nu} \partial'^\nu}_{= \partial'_\xi} F'^{\xi\gamma} = \frac{4\pi}{c} j'^\gamma \quad \Rightarrow \quad \boxed{\partial'_\xi F'^{\xi\gamma} = \frac{4\pi}{c} j'^\gamma}$$

das bedeutet u.a.

→ es existieren Lösungen der Maxwellgleichungen, die sich in jedem IS mit Geschwindigkeit c ausbreiten

zum Abschluss von Kap. 1.3:

Transformation der physikalischen Felder

IS: $\rho, \vec{j}$ vorgegeben $\longrightarrow$ $\vec{E}, \vec{B}$ aus der Lösung der Maxwellgleichungen in IS

$\big\downarrow\ j' = \Lambda j \qquad\qquad \big\downarrow\ F' = \Lambda F \Lambda^T$

IS': $\rho', \vec{j}'$ $\qquad$ $\vec{E}', \vec{B}'$ → das sind Lösungen der Maxwellgleichungen in IS' für vorgegebenes $\rho', \vec{j}'$

die Transformation des Feldstärketensors ergibt: (siehe Aufgabe 17)

$$\left(F'^{\alpha\beta}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -E_x' & -E_y' & -E_z' \\ E_x' & 0 & -B_z' & B_y' \\ E_y' & B_z' & 0 & -B_x' \\ E_z' & -B_y' & B_x' & 0 \end{pmatrix} = \Lambda F \Lambda^T$$

die Transformation der elektrischen und magnetischen Felder lautet dann:

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{E}'_{\parallel} &= \vec{E}_{\parallel}, & \vec{E}'_{\perp} &= \gamma\left(\vec{E}_{\perp} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}\right) \\ \vec{B}'_{\parallel} &= \vec{B}_{\parallel}, & \vec{B}'_{\perp} &= \gamma\left(\vec{B}_{\perp} - \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{E}\right) \end{aligned}}$$

A.4 Strahlungsphänomene

beschleunigte Ladungen strahlen elektromagnetische Wellen ab

→ berechne zunächst die Potentiale $\Phi(\vec{r},t)$, $\vec{A}(\vec{r},t)$ für eine zeitabhängige Ladungsdichte $\rho(\vec{r},t)$ bzw. Stromdichte $\vec{j}(\vec{r},t)$

→ „retardierte Potenziale"

<u>Ausgangspunkt</u>: Maxwellgleichungen für die Potentiale

$$\Box \vec{A} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}, \quad \Box \Phi = -4\pi\rho$$

ausgeschrieben für das skalare Potential:

$$\Delta\Phi(\vec{r},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi(\vec{r},t) = -4\pi\rho(\vec{r},t) \qquad (*)$$

jetzt: Fourier-Transformation der Zeitabhängigkeit von Φ und ρ:

$$\Phi(\vec{r},t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, \Phi_\omega(\vec{r})\, e^{-i\omega t}$$

$$\rho(\vec{r},t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, \rho_\omega(\vec{r})\, e^{-i\omega t}$$

Einsetzen in (*)

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \left(\Delta - \underbrace{\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}) \Phi_\omega(\vec{r}) e^{-i\omega t}}_{\text{ergibt } -\omega^2/c^2} = -4\pi \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, \rho_\omega(\vec{r}) e^{-i\omega t}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \left(\Delta + \frac{\omega^2}{c^2} \right) \Phi_\omega(\vec{r}) e^{-i\omega t} = -4\pi \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, \rho_\omega(\vec{r}) e^{-i\omega t}$$

Gleichheit muss für jede Fourierkomponente unabhängig gelten!

$$\Rightarrow \boxed{\left(\Delta + \frac{\omega^2}{c^2} \right) \Phi_\omega(\vec{r}) = -4\pi \rho_\omega(\vec{r})} \quad (*)$$

ohne Beweis: es existiert folgende Darstellung der dreidimensionalen δ-Funktion:

$$(\Delta + k^2) \frac{e^{\pm ikr}}{r} = -4\pi \delta^3(\vec{r})$$

oder allgemeiner:

$$(\Delta + k^2) \underbrace{\frac{e^{\pm ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}}_{\text{Greensche Funktion}} = -4\pi \delta^3(\vec{r}-\vec{r}')$$

die Lösung der Differentialgleichung $(*)$ für $\Phi_\omega(\vec{r})$ lässt sich damit folgendermaßen konstruieren:

$$\Phi_\omega(\vec{r}) = \int d^3r'\, \rho_\omega(\vec{r}') \frac{e^{+i\omega|\vec{r}-\vec{r}'|/c}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \qquad \left(k \to \frac{\omega}{c}\right)$$

Beweis durch Einsetzen in $(*)$

Achtung: wähle '+' in $e^{+i\omega \dots}$, nicht '−'; Erklärung folgt

Einsetzen von $\Phi_\omega(\vec{r})$ in die Fourier-Darstellung von $\Phi(\vec{r},t)$

$$\Phi(\vec{r},t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int d^3r'\, \rho_\omega(\vec{r}') \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \underbrace{e^{+i\omega|\vec{r}-\vec{r}'|/c}\, e^{-i\omega t}}_{= e^{-i\omega t'}} = \dots$$

$$\text{mit} \quad \boxed{t' = t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}}$$

Greensche Funktionen

betrachte einen linearen Differentialoperator L über $[a,b]$

z.B.: $Ly = y'' + y$

Def.: die Greensche Funktion G für L ist eine auf $[a,b]\times[a,b]$ definierte Funktion $G(x,\xi)$ mit folgender Eigenschaft:

für jedes stetige $f(x)$ auf $[a,b]$ ist die Funktion $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ definiert durch

$$\boxed{g(x) = \int_a^b G(x,\xi)\, f(\xi)\, d\xi} \quad (*)$$

eine Lösung der inhomogenen Dgl $Ly = f$.

es gilt: $G(x,\xi)$ ist eine Lösung der inhomogenen Dgl

$$\boxed{L_x\, G(x,\xi) = \delta(x-\xi)}$$

Zusammenhang mit $(*)$: Einsetzen von $g(x)$ aus $(*)$ in $Ly = f$

$$\to \quad L\, g(x) = L \int_a^b G(x,\xi)\, f(\xi)\, d\xi = \int_a^b \underbrace{L_x\, G(x,\xi)}_{=\delta(x-\xi)}\, f(\xi)\, d\xi = f(x) \quad \checkmark$$

Erweiterung auf partielle Dgl

Beispiel: Poisson-Gleichung $\boxed{\Delta\Phi(\vec{r}) = -4\pi\rho(\vec{r})}$ also $L = \Delta$

die Greensche Funktion des Laplace-Operators Δ ist die Lösung der Dgl

$$\Delta G(\vec{r},\vec{r}_0) = \delta(\vec{r}-\vec{r}_0)$$

es gilt (siehe klpI): $\Delta \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0|} = -4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}_0) \Rightarrow \boxed{G(\vec{r},\vec{r}_0) = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}}$

mithilfe der Greenschen Funktion lässt sich die Lösung der Poisson-Gleichung für beliebige $\rho(\vec{r})$ konstruieren:

analog zu (*):

$$\Phi(\vec{r}) = \int d^3r' \, G(\vec{r},\vec{r}') \, f(\vec{r}') \qquad \text{mit} \quad f(\vec{r}') = -4\pi \, \rho(\vec{r}')$$

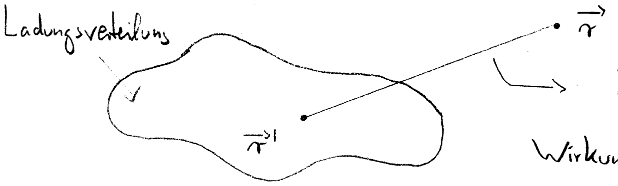
$$= \int d^3r' \, \frac{-1}{4\pi} \, \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \, (-4\pi) \, \rho(\vec{r}')$$

$$= \int d^3r' \, \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$ ist damit eine Lösung der Poisson-Gleichung

↳ die übliche Form des elektrostatischen Potentials einer Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$

$$\ldots = \int d^3r' \, \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \, \rho_\omega(\vec{r}\,') \, e^{-i\omega t'}}_{= \rho(\vec{r}\,', t')} = \int d^3r' \, \frac{\rho(\vec{r}\,', t')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

das bedeutet: die Ladungsdichte am Ort $\vec{r}\,'$ zur Zeit t' beeinflusst das Potential Φ am Ort $\vec{r}$ zu einem <u>späteren</u> Zeitpunkt t



Entfernung: $|\vec{r}-\vec{r}\,'|$

Wirkung breitet sich mit $v = c$ aus

$\rightarrow$ Laufzeit $\frac{1}{c} |\vec{r}-\vec{r}\,'| \Rightarrow t = t' + \frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}$

Potential heisst „retardiert": $\Phi \rightarrow \Phi_{ret}$

im Gegensatz zum „avancierten" Potential Φ_{av} mit $t = t' - \frac{1}{c}|\vec{r}-\vec{r}\,'|$

die retardierten Potentiale haben die Form:

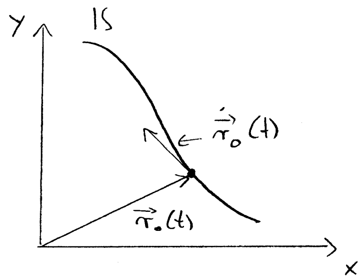
$$\boxed{\Phi_{ret}(\vec{r}, t) = \int d^3r' \, \frac{\rho(\vec{r}\,', t - \frac{1}{c}|\vec{r}-\vec{r}\,'|)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}$$

analog für das Vektorpotential:

$$\boxed{\vec{A}_{ret}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \int d^3r' \, \frac{\vec{j}(\vec{r}\,', t - \frac{1}{c}|\vec{r}-\vec{r}\,'|)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}$$

<u>beschleunigte Ladung</u>

betrachte eine Punktladung mit der Bahn $\vec{r}_0(t)$

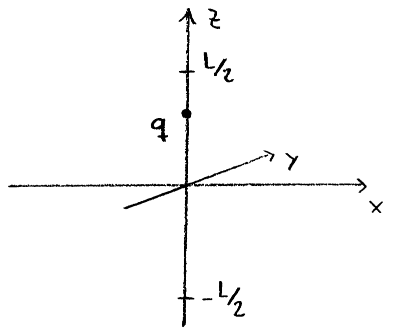


Ladungsverteilung: $\rho(\vec{r}, t) = q\, \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_0(t))$

Stromverteilung: $\vec{j}(\vec{r}, t) = q\, \dot{\vec{r}}_0(t)\, \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_0(t))$

$\rightarrow$ bestimme die retardierten Potentiale der bewegten Punktladung am Punkt P

Beispiel:



Punktladung q am Ort

$$\vec{r}_0(t) = \frac{L}{2}\cos(\omega t)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \quad \dot{\vec{r}}_0(t) = -\frac{L}{2}\,\omega\,\sin(\omega t)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \rho\left(\vec{r}\,', t - \tfrac{1}{c}|\vec{r}-\vec{r}\,'|\right) = q\,\delta\left(\vec{r}\,' - \vec{r}_0\left(t - \tfrac{1}{c}|\vec{r}-\vec{r}\,'|\right)\right)$$

$$= q\,\delta\left(\vec{r}\,' - \tfrac{L}{2}\cos\left(\omega\left(t - \tfrac{1}{c}|\vec{r}-\vec{r}\,'|\right)\right)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) \qquad \vec{r}\,' = \begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$$

$$= q\,\delta(x')\,\delta(y')\,\delta\left(z' - \tfrac{L}{2}\cos\left(\omega\left(t - \tfrac{1}{c}|\vec{r}-\vec{r}\,'|\right)\right)\right)$$

für das retardierte Potential folgt damit:

$$\Phi_{ret}(\vec{r},t) = \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dy' \int_{-\infty}^{\infty} dz' \,\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\, q\,\delta(x')\,\delta(y')\,\delta(z' - \dots) = \dots$$

$$|\vec{r}-\vec{r}\,'| = \left((x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\dots = \int_{-\infty}^{\infty} dz' \,\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-z')^2}}\, q\,\delta\left(z' - \tfrac{L}{2}\cos\left(\omega\left(t - \tfrac{1}{c}\sqrt{x^2+y^2+(z-z')^2}\right)\right)\right) = \dots$$

zu beachten: hier wurde verwendet

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dy' \int_{-\infty}^{\infty} dz'\, \delta(f(x',y',z'))\,\delta(x')\,\delta(y') = \int_{-\infty}^{\infty} dz'\,\delta(f(0,0,z'))$$

$$\dots = \int_{-\infty}^{\infty} dz'\, \Psi_{x,y,z}(z')\,\delta\left(g_{x,y,z}(z')\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Psi_{x,y,z}(z_i')}{|g'_{x,y,z}(z_i')|}$$

mit z_i' den Nullstellen der Funktion $g_{x,y,z}(z') = z' - \frac{L}{2}\cos\left(\omega\left(t - \frac{1}{c}\sqrt{x^2+y^2+(z-z')^2}\right)\right)$

$\longrightarrow$ Keine analytische Lösung möglich!

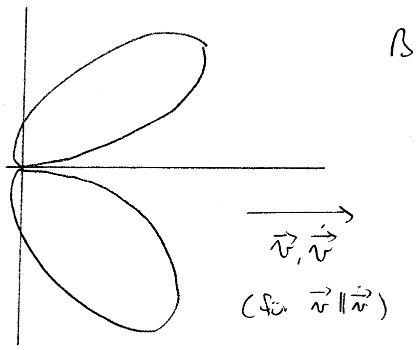
für $\vec{\beta} = 0$: gleichförmig bewegte Ladung

-> der zweite Term in $\vec{E}(\vec{r},t)$ ist 0

-> der erste Term entspricht dem Ergebnis aus $F' = \Lambda F \Lambda^T$

der zweite Term -> beschreibt das Strahlungsfeld einer beschleunigten Ladung

z.B.: Winkelverteilung der Abstrahlung



$\beta = \frac{v}{c} = 0{,}5$

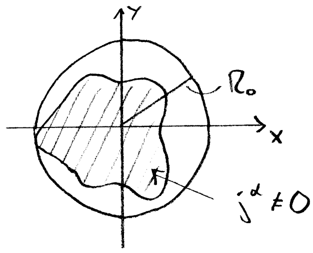
siehe Fließbach, Elektrodynamik, Kap. 23

Dipolstrahlung

betrachte eine oszillierende Ladungsverteilung, d.h. Ladungs- und Stromdichte sind periodisch:

$$j^\alpha(\vec{r},t) = j^\alpha(\vec{r})\, e^{-i\omega t}$$

die j^α sind auf einen endlichen Bereich beschränkt



d.h. $j^\alpha(\vec{r}) = \begin{cases} \text{beliebig} & : r < R_0 \\ 0 & : r > R_0 \end{cases}$

Ziel: Bestimmung der Felder $\vec{E}, \vec{B}$ für $r \gg R_0$

Behauptung: alle Felder und Potentiale lassen sich wie $j^\alpha(\vec{r},t)$ in Zeit- und Ortsanteil separieren

Beweis:

zunächst: Einsetzen von $j^\alpha(\vec{r}\,',t)$ in das retardierte Vektorpotential

$$\vec{A}_{ret}(\vec{r},t) = \frac{1}{c}\int d^3r'\, \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\, \vec{j}\left(\vec{r}\,', t - \frac{1}{c}|\vec{r}-\vec{r}\,'|\right) =$$

$$= \frac{1}{c}\int d^3r' \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\vec{j}(\vec{r})\,e^{-i\omega(t-\frac{1}{c}|\vec{r}-\vec{r}\,'|)}$$

$$= \vec{A}(\vec{r})\,e^{-i\omega t}$$ mit dem Ortsanteil definiert als

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c}\int d^3r' \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\vec{j}(\vec{r})\,e^{i\frac{\omega}{c}|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \qquad (*)$$

aus $\vec{B}(\vec{r},t) = \vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{r},t) = [\vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{r})]\,e^{-i\omega t}$ folgt dann

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \vec{B}(\vec{r})\,e^{-i\omega t} \quad \text{mit} \quad \vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{r})$$

außerhalb der Ladungsverteilung gilt die Maxwellgleichung

$$\underbrace{\vec{\nabla}\times\vec{B}(\vec{r},t)}_{= (\vec{\nabla}\times\vec{B}(\vec{r}))\,e^{-i\omega t}} - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = 0 \quad , \text{da } \vec{j} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}(\vec{r})\,e^{-i\omega t}$$

und damit folgt: $\quad \vec{E}(\vec{r}) = \frac{i}{k}\,\vec{\nabla}\times\vec{B}(\vec{r})$

<u>Voraussetzung für die folgenden Rechnungen</u>

$$\boxed{R_0 \ll \lambda \ll r} \qquad \text{mit } \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi c}{\omega}$$

Auswertung der Formel für $\vec{A}(\vec{r}) \rightarrow$ Gl. (*)

Entwicklung von $\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$ für $|\vec{r}| \gg |\vec{r}\,'|$ $\longrightarrow$ siehe KTP I: Multipolentwicklung

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \frac{1}{r}\left[1 + \frac{\vec{r}\cdot\vec{r}\,'}{r^2} + \dots\right] \qquad \text{schreibe } \vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r}$$

$$= \frac{1}{r}\left[1 + \frac{1}{r}\vec{e}_r\cdot\vec{r}\,' + \dots\right]$$

$$\Rightarrow \quad |\vec{r}-\vec{r}\,'| = r\left[1 - \frac{1}{r}\vec{e}_r\cdot\vec{r}\,' + \dots\right] = r - \vec{e}_r\cdot\vec{r} + \dots$$

$$\Rightarrow \quad e^{ik|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \approx e^{ikr}\,e^{-ik\vec{e}_r\cdot\vec{r}}$$

Einsetzen in $\vec{A}(\vec{r})$:

$$\vec{A}(\vec{r}) \approx \frac{1}{c}\int d^3r' \frac{1}{r}\left[1 + \frac{1}{r}\vec{e}_r\cdot\vec{r}\,'\right] e^{ikr}\,e^{-ik\vec{e}_r\cdot\vec{r}}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{A}(\vec{r}) \approx \frac{1}{c}\frac{e^{ikr}}{r}\int d^3r'\,\vec{j}(\vec{r}\,')\,e^{-ik\vec{e}_r\cdot\vec{r}\,'}$$

jetzt: Langwellennäherung $\lambda \gg R_0$

d.h. $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ klein $\Rightarrow$ $e^{-ik\vec{e}_r\cdot\vec{r}\,'} = 1 \underbrace{-ik\vec{e}_r\cdot\vec{r}\,' + \ldots}_{\text{wird vernachlässigt}}$

in führender Ordnung ergibt sich also

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c}\frac{e^{ikr}}{r}\int d^3r'\,\vec{j}(\vec{r}\,')}$$

zu beachten: dieses $\vec{j}(\vec{r})$ ist nicht das $\vec{j}(\vec{r})$ aus der Magnetostatik (für $\omega \neq 0$)

deswegen gilt nicht wie in der Magnetostatik:

$\int d^3r\,\vec{j}(\vec{r}) = 0$ siehe Skript J. Krug Kap. 3.6

$\rightarrow$ der Monopolterm verschwindet für jede Stromverteilung

Zusammenhang $\rho(\vec{r}) \leftrightarrow \vec{j}(\vec{r})$:

Kontinuitätsgleichung: $\frac{\partial}{\partial t}\rho(\vec{r},t) + \vec{\nabla}\cdot\vec{j}(\vec{r},t) = 0$

$$-i\omega\,\rho(\vec{r})e^{-i\omega t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{j}(\vec{r})\,e^{-i\omega t} = 0$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{j}(\vec{r}) = i\omega\,\rho(\vec{r})}$ im Gegensatz zum statischen Fall: $\vec{\nabla}\cdot\vec{j}(\vec{r}) = 0$

$\hookrightarrow$ Faktor 'i' entspricht Phasenverschiebung von $\frac{\pi}{2}$

alternativ: $\rho(\vec{r},t) = \rho(\vec{r})\sin(\omega t)$

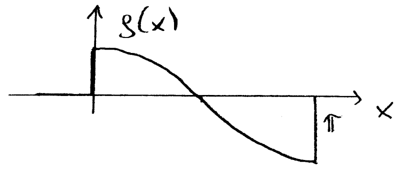
$$\Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t}\rho(\vec{r},t) = \omega\,\rho(\vec{r})\cos(\omega t) = -\vec{\nabla}\cdot\vec{j}(\vec{r},t)$$

der Ansatz für $\vec{j}(\vec{r},t)$ muss also lauten: $\vec{j}(\vec{r},t) = \vec{j}(\vec{r})\cos(\omega t)$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{j}(\vec{r}) = -\omega\,\rho(\vec{r})}$$

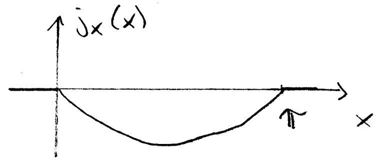
speziell: betrachte die folgende, eindimensionale Ladungsverteilung

$$\rho(x) = \begin{cases} \cos x \; ; & 0 < x < \pi \\ 0 \; ; & \text{sonst} \end{cases}$$



$$\Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x} j_x(x) = -\omega \rho(x) = -\omega \cos x$$

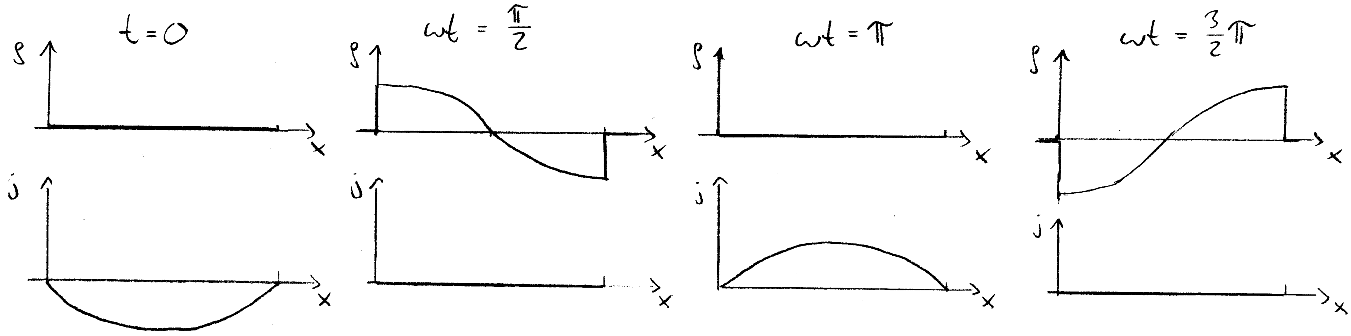
$$\rightarrow \quad j_x(x) = -\omega \sin x$$



Zeitentwicklung:

$$\rho(x,t) = \rho(x) \sin(\omega t) = \cos(x) \sin(\omega t)$$

$$j(x,t) = j(x) \cos(\omega t) = -\omega \sin(x) \cos(\omega t)$$



insb. gilt $\quad \int dx \; j(x) \neq 0$

allgemein gilt: $\quad \int d^3r \; \vec{j}(\vec{r}) = -i\omega \int d^3r \; \vec{r} \rho(\vec{r}) \qquad$ (ohne Beweis)

Definition:

Dipolmoment $\quad \boxed{\vec{p} = \int d^3r \; \vec{r} \rho(\vec{r})}$

$\Rightarrow \quad \int d^3r \; \vec{j}(\vec{r}) = -i\omega \vec{p} \quad$ und für den Ortsanteil des Vektorpotentials folgt

$$\boxed{A(\vec{r}) = -ik\vec{p} \; \frac{e^{ikr}}{r}}$$

$\longrightarrow \quad \vec{A}(\vec{r},t)$ beschreibt eine auslaufende Kugelwelle

$$\vec{A}(\vec{r},t) = -ik\vec{p} \; \frac{1}{r} \; e^{i(kr - \omega t)}$$

Berechnung der physikalischen Felder über

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r})$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{i}{k} \vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}) \qquad \text{(siehe oben)}$$

für den Ortsanteil des magnetischen Felds ergibt sich dann:

$$\vec{B}(\vec{r}) = -ik\,\vec{\nabla}\times\left[\vec{p}\,\frac{e^{ikr}}{r}\right] = \ldots$$

es gilt: $\vec{\nabla}\times[\vec{a}\,f(r)] = \frac{f'(r)}{r}(\vec{r}\times\vec{a})$

$$f(r) = \frac{e^{ikr}}{r} \quad \Rightarrow \quad f'(r) = \frac{e^{ikr}}{r}\underbrace{\left(ik - \frac{1}{r}\right)}_{\approx ik}$$

$\approx ik$ wg $\lambda \ll r$, d.h. $k \gg \frac{1}{r}$

$$\ldots = \underbrace{-ik\cdot ik}_{k^2}\,\frac{e^{ikr}}{r^2}(\vec{r}\times\vec{p}),$$

mit $\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r}$ folgt schließlich:

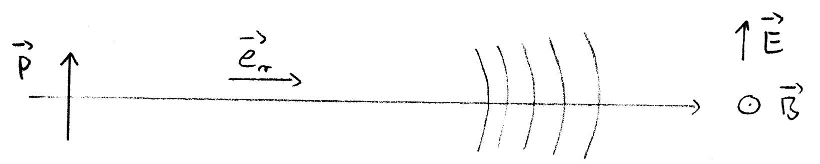
$$\boxed{\vec{B}(\vec{r}) = k^2\,\frac{e^{ikr}}{r}\,(\vec{e}_r\times\vec{p})}$$

für das elektrische Feld folgt

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = k^2\,(\vec{e}_r\times\vec{p})\times\vec{e}_r\,\frac{e^{ikr}}{r}}$$

<u>z.B.:</u> $\vec{p} = (0,p,0)$ und $\vec{e}_r = (1,0,0)$

$\rightarrow\ \vec{e}_r\times\vec{p} = (0,0,p)$ und $(\vec{e}_r\times\vec{p})\times\vec{e}_r = (0,p,0)$



d.h. $\vec{B}\perp\vec{E}$ und beide $\perp$ zur Ausbreitungsrichtung

$\rightarrow$ wie bei der ebenen Welle

<u>Energiestromdichte</u>

$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}\,\vec{E}\times\vec{B}$ zeigt in Richtung von $\vec{e}_r$

d.h. von der oszillierenden Ladungsverteilung radial nach aussen

B. Analytische Mechanik

B.1 Lagrange-Formalismus

Newtonsche Mechanik $\rightarrow$ Bewegungsgleichungen für ein System von Teilchen:

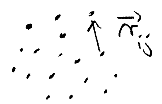
$$\boxed{m\ddot{\vec{r}}_i = \sum_j \vec{F}_{ji} + \vec{F}_i^{(e)}} \quad \Rightarrow$$

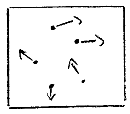
- Kräfte einsetzen
- gekoppelte Differentialgleichungen lösen

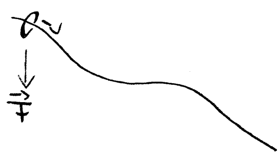
im folgenden:

Berücksichtigung sog. Zwangsbedingungen, die die Bewegung der Teilchen einschränken

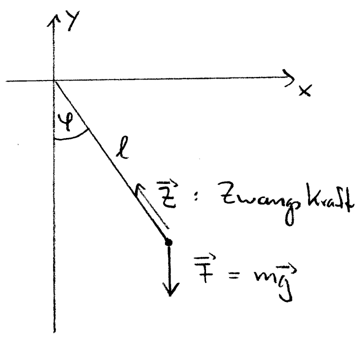
Beispiele:

- starre Körper  $\rightarrow \quad |\vec{r}_{ij}| - a_{ij} = 0$

- Gasmoleküle in einem Behälter 

- Perle auf Draht  $\rightarrow$ Bewegung eines Teilchens längs einer vorgegebenen Kurve

das ebene Pendel



die Beschränkung der Bahn kann durch folgende Zwangsbedingungen ausgedrückt werden

$$z = 0 \quad , \quad x^2 + y^2 - \ell^2 = 0$$

mit der durch den Faden auf den Massenpunkt ausgeübten Zwangskraft $\vec{Z}$ lautet das zweite Newtonsche Axiom:

$$\boxed{m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \vec{Z}}$$

Problem: $\vec{Z}$ unbekannt $\rightarrow$ hängt i.A. von der tatsächlichen Bewegung ab
nur die Wirkung auf die Bewegung ist bekannt $\rightarrow$ Zwangsbedingungen

Lösung: a) Bestimmung der Zwangskräfte
$\rightarrow$ Lagrangegleichungen 1. Art

oder b) Zwangskräfte werden eliminiert
$\rightarrow$ generalisierte Koordinaten $\rightarrow$ Lagrangegleichungen 2. Art

Klassifikation von Zwangsbedingungen

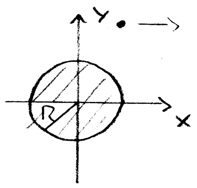
- holonome Zwangsbedingungen lassen sich schreiben als:

$$\boxed{g_\alpha(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t) = 0} \quad (*) \qquad \alpha = 1, 2, \dots R$$

für das ebene Pendel: $g_1(\vec{r}, t) = z$, $g_2(\vec{r}, t) = x^2 + y^2 - \ell^2$

- Zwangsbedingungen, die sich nicht durch (*) darstellen lassen, heißen nichtholonom

z.B.:



$\rightarrow$ Bewegung eines Massenpunkts außerhalb einer Kreisscheibe

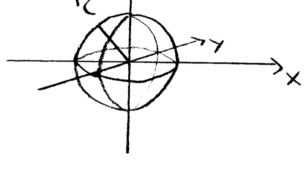
$$x^2 + y^2 - R^2 \geq 0$$

Im folgenden nur holonome Zwangsbedingungen, ev. zeitabhängig, z.B.:
Fadenlänge $\rightarrow \ell(t)$ $\Rightarrow$ $g_2(\vec{r}, t) = x^2 + y^2 - \ell(t)^2 = 0$

rheonome Zwangsbedingungen $\rightarrow$ zeitabhängig
skleronome — " — $\rightarrow$ zeitunabhängig

Richtung der Zwangskräfte

jede holonome Zwangsbedingung bedeutet die Beschränkung der Bewegung auf eine Fläche, z.B.:



$$g(\vec{r}, t) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$$

→ Zwangskraft steht ⊥ auf dieser Fläche : $\vec{Z} \parallel \vec{\nabla} g(\vec{r},t)$

in diesem Beispiel: $\vec{\nabla} g(\vec{r},t) = 2\vec{r}$

⇒ Ansatz für die Zwangskraft : $\boxed{\vec{Z}(\vec{r},t) = \lambda(t)\,\vec{\nabla} g(\vec{r},t)}$

Einsetzen in $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \vec{Z}$

→ Lagrangegleichungen 1. Art für eine holonome Zwangsbed. und ein Teilchen

$$\boxed{m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \lambda\,\vec{\nabla} g(\vec{r},t)\,, \quad g(\vec{r},t) = 0}$$

↳ 4 Gleichungen für 4 unbekannte Funktionen: $x(t), y(t), z(t)$ und $\lambda(t)$

(3 Dgl. 2ter Ordnung, eine algebraische Gl.)

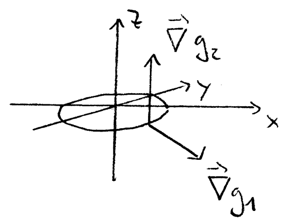
[systematisches Lösungsverfahren folgt später]

ein Teilchen, zwei Zwangsbedingungen

→ Einschränkung der Bewegung auf eine Kurve

z.B.: $g_1(\vec{r},t) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$

$g_2(\vec{r},t) = z = 0$



$$\Rightarrow \quad \vec{Z}(\vec{r},t) = \lambda_1(t)\,\vec{\nabla} g_1(\vec{r},t) + \lambda_2(t)\,\vec{\nabla} g_2(\vec{r},t)$$

→ Lagrangegleichungen 1. Art:

$$\boxed{m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \sum_{\alpha=1}^{2} \lambda_\alpha(t)\,\vec{\nabla} g_\alpha(\vec{r},t)\,, \quad g_\alpha(\vec{r},t) = 0}$$

↳ 5 Gleichungen für 5 unbekannte Funktionen

allgemeiner Fall

N Teilchen mit den kartesischen Koordinaten $x_n = x_{3\nu + j - 3}$

$\nu = 1,2,\dots,N$; $j = 1,2,3$ ⇒ $n = 1,\dots 3N$

d.h. der Ortsvektor $\vec{r}_3$ des Teilchens $\nu = 3$ hat die Komponenten x_7, x_8, x_9

Masse des ν-ten Teilchens : $m_{3\nu} = m_{3\nu-1} = m_{3\nu-2}$

damit lautet die allgemeine Form der Lagrangegleichungen 1. Art :

$$\boxed{\begin{aligned} m_n \ddot{x}_n &= F_n + \sum_{\alpha=1}^{R} \lambda_\alpha(t) \frac{\partial}{\partial x_n} g_\alpha(x_1, \dots, x_{3N}, t) , \quad n = 1, 2, \dots 3N \\ g_\alpha(x_1, \dots, x_{3N}, t) &= 0 , \quad \alpha = 1, 2, \dots R \end{aligned}} \qquad (LG1)$$

$3N + R$ Gleichungen für $3N + R$ unbekannte Funktionen $x_n(t)$ und $\lambda_\alpha(t)$

Energieerhaltung in Systemen mit Zwangsbedingungen

bilde $\sum_{n=1}^{3N} (LG1) \cdot \dot{x}_n$

$\longrightarrow$ linke Seite : $\sum_{n=1}^{3N} m_n \ddot{x}_n \dot{x}_n = \frac{d}{dt} \underbrace{\sum_{n=1}^{3N} \frac{1}{2} m_n \dot{x}_n^2}_{= T \,:\, \text{Kinetische Energie}} = \frac{d}{dt} T$

$\longrightarrow$ rechte Seite, erster Term :

für Konservative Kräfte gilt $\vec{F} = - \vec{\nabla} U \quad \longrightarrow \quad F_n = - \frac{\partial U}{\partial x_n}$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{3N} F_n \dot{x}_n = - \sum_{n=1}^{3N} \frac{\partial U}{\partial x_n} \dot{x}_n = - \frac{d}{dt} U(x_1, \dots, x_{3N})$$

damit erhalten wir : $\frac{d}{dt}(T + U) = \sum_{\alpha=1}^{R} \sum_{n=1}^{3N} \lambda_\alpha \frac{\partial g_\alpha}{\partial x_n} \dot{x}_n = \dots$

aus der Zwangsbedingung $g_\alpha(x_1, \dots, x_{3N}, t) = 0$ folgt :

$$\frac{d}{dt} g_\alpha(x_1, \dots, x_{3N}, t) = \sum_{n=1}^{3N} \frac{\partial g_\alpha}{\partial x_n} \dot{x}_n + \frac{\partial g_\alpha}{\partial t} = 0$$

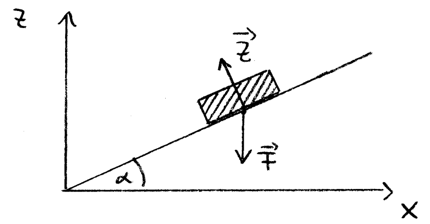
$$\dots = - \sum_{\alpha=1}^{R} \lambda_\alpha \frac{\partial g_\alpha}{\partial t}$$

der Energiesatz hat damit folgende Form :

Kräfte Konservativ & Zwangsbedingungen zeitunabhängig $\Rightarrow T + U = \text{const}$

allgemeines Verfahren zur Lösung der Lagrangegleichungen 1. Art

mit Anwendung auf → Gleiten eines Körpers auf einer schiefen Ebene (reibungsfrei)



hier: Körper = Massenpunkt

1. Formulierung der Zwangsbedingungen

$$g_1(\vec{r},t) = x \sin\alpha - z\cos\alpha = 0 \quad , \quad g_2(\vec{r},t) = y = 0$$

2. Aufstellen der Lagrangegleichungen 1. Art

$$\vec{F} = -mg\vec{e}_z$$

$$\vec{Z} = \lambda_1 \vec{\nabla} g_1 + \lambda_2 \vec{\nabla} g_2 \quad \longrightarrow \text{ Bestimmung der } \vec{\nabla} g_i$$

$$\vec{\nabla} g_1(\vec{r},t) = \begin{pmatrix} \sin\alpha \\ 0 \\ -\cos\alpha \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{\nabla} g_2(\vec{r},t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

⇒ LG1 in Komponenten:

$$\boxed{\begin{aligned} m\ddot{x} &= \lambda_1 \sin\alpha \\ m\ddot{y} &= \lambda_2 \\ m\ddot{z} &= -\lambda_1\cos\alpha - mg \end{aligned}} \qquad (*)$$

3. Elimination der λ_α

→ bilde die zweifache totale Zeitableitung der Zwangsbedingungen

d.h. $\frac{d^2}{dt^2} g_\alpha(\vec{r},t) = 0$

$$\frac{d^2}{dt^2} g_1(\vec{r},t) = \ddot{x}\sin\alpha - \ddot{z}\cos\alpha \quad ; \quad \frac{d^2}{dt^2} g_2(\vec{r},t) = \ddot{y}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} \ddot{x}\sin\alpha - \ddot{z}\cos\alpha &= 0 \\ \ddot{y} &= 0 \end{aligned}} \quad \longleftarrow \text{ Einsetzen der } \ddot{x},\ddot{y},\ddot{z} \text{ aus } (*)$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\lambda_1 \sin^2\alpha + \lambda_1 \cos^2\alpha}_{= \lambda_1} + mg\cos\alpha = 0 \quad \longrightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} \lambda_1 &= -mg\cos\alpha \\ \lambda_2 &= 0 \end{aligned}}$$

und Einsetzen in die Bewegungsgleichungen (*) ergibt

$$\boxed{\begin{aligned} m\ddot{x} &= -mg\sin\alpha\cos\alpha \\ m\ddot{y} &= 0 \\ m\ddot{z} &= -mg\sin^2\alpha \end{aligned}} \quad \longrightarrow \text{ wegen } \quad mg\cos^2\alpha - mg = -mg\sin^2\alpha$$

das allgemeine Verfahren zur Elimination der λ_α

$\longrightarrow$ bilde $\quad \dfrac{d^2}{dt^2} g_\alpha(x_1, x_2, \dots, x_{3N}, t) = 0 \qquad \alpha = 1, \dots R$

es gilt:

$$\frac{d}{dt} g_\alpha = \sum_{n=1}^{3N} \frac{\partial g_\alpha}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt} + \frac{\partial g_\alpha}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2}{dt^2} g_\alpha = \frac{d}{dt}\left[\sum_{n=1}^{3N} \frac{\partial g_\alpha}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt} + \frac{\partial g_\alpha}{\partial t}\right]$$

$$= \sum_{n=1}^{3N}\left[\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial g_\alpha}{\partial x_n}\right)\dot{x}_n + \frac{\partial g_\alpha}{\partial x_n}\ddot{x}_n\right] + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial g_\alpha}{\partial t}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{3N} \frac{\partial g_\alpha}{\partial x_n}\ddot{x}_n - \underbrace{G_\alpha(x, \dot{x}, t)}_{\text{enthält nur die } x_n,\, \dot{x}_n \text{ und } t\text{; nicht } \ddot{x}_n} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\sum_{n=1}^{3N} \frac{\partial g_\alpha}{\partial x_n}\ddot{x}_n = G_\alpha(x, \dot{x}, t)}$$

hier werden jetzt die LG1 eingesetzt

d.h. $\quad \ddot{x}_n = \dfrac{1}{m_n}\left[F_n + \displaystyle\sum_{\beta=1}^{R} \lambda_\beta \frac{\partial g_\beta}{\partial x_n}\right]$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\sum_{n=1}^{3N} \frac{\partial g_\alpha(x,t)}{\partial x_n}\frac{1}{m_n}\left[F_n(x, \dot{x}, t) + \sum_{\beta=1}^{R} \lambda_\beta \frac{\partial g_\beta(x,t)}{\partial x_n}\right] = G_\alpha(x, \dot{x}, t)}$$

- lineares, inhomogenes Gleichungssystem für die λ_α
  $\longrightarrow$ R Gleichungen für R Unbekannte
- Koeffizienten können von $x, \dot{x}, t$ abhängen, nicht aber von $\ddot{x}$

Lösung des linearen Gleichungssystems ergibt:

$$\lambda_\alpha = \lambda_\alpha(x, \dot{x}, t) \qquad (\alpha = 1, \dots, R)$$

für die Komponenten der Zwangskräfte folgt damit

$$Z_n = \sum_{\alpha=1}^{R} \lambda_\alpha(x, \dot{x}, t) \, \frac{\partial g_\alpha(x,t)}{\partial x_n} = Z_n(x, \dot{x}, t)$$

Einsetzen in die Bewegungsgleichungen ($\rightarrow$ LG1)

$$m \ddot{x}_n = \underbrace{F_n(x, \dot{x}, t) + Z_n(x, \dot{x}, t)}$$

bekannte Funktionen von $x, \dot{x}, t$!

4. Lösung der Bewegungsgleichungen

für die schiefe Ebene $\longrightarrow$ allgemeine Lösung:

$$x(t) = -\frac{1}{2} g t^2 \sin\alpha \cos\alpha + a_1 t + a_2$$
$$y(t) = b_1 t + b_2$$
$$z(t) = -\frac{1}{2} g t^2 \sin^2\alpha + c_1 t + c_2$$

5. Bestimmung der Integrationskonstanten

zu beachten: sowohl die Zwangsbedingungen, als auch die Anfangsbedingungen müssen erfüllt werden

Zwangsbedingungen:

$$\rightarrow g_1(\vec{r}, t) = \underset{\uparrow}{x} \sin\alpha - \underset{\uparrow}{z} \cos\alpha = 0$$

hier: Einsetzen von $x(t)$ und $z(t)$

$$\left[-\frac{1}{2} g t^2 \sin\alpha \cos\alpha + a_1 t + a_2\right] \sin\alpha - \left[-\frac{1}{2} g t^2 \sin^2\alpha + c_1 t + c_2\right] \cos\alpha = 0$$

$$\underbrace{(a_1 \sin\alpha - c_1 \cos\alpha)}_{=0} t + \underbrace{(a_2 \sin\alpha - c_2 \cos\alpha)}_{=0} = 0$$

unabhängig voneinander, da Gl. für beliebige t gelten soll diese beiden Gleichungen werden gelöst durch:

$$a_1 = v_0 \cos\alpha \quad , \quad c_1 = v_0 \sin\alpha$$
$$a_2 = s_0 \cos\alpha \quad , \quad c_2 = s_0 \sin\alpha$$

$$\longrightarrow \quad g_2(\vec{r},t) = y = 0 \quad \Rightarrow \quad b_1 t + b_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad b_1 = b_2 = 0$$

die allgemeine, mit den Zwangsbedingungen verträgliche Lösung lautet:

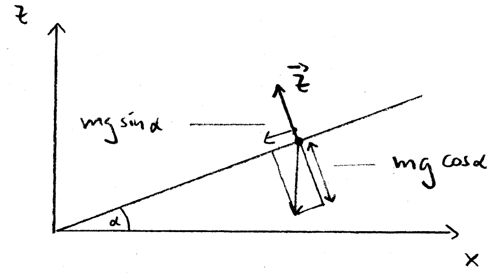
$$\left.\begin{aligned} x(t) &= s(t)\cos\alpha \\ y(t) &= 0 \\ z(t) &= s(t)\sin\alpha \end{aligned}\right\} \quad \text{mit} \quad s(t) = -\frac{1}{2} g t^2 \sin\alpha + v_0 t + s_0$$

v_0, s_0 werden durch die Anfangsbedingungen festgelegt

6. Bestimmung der Zwangskräfte

$$\vec{Z} = \lambda_1(t)\vec{\nabla}g_1 + \lambda_2(t)\vec{\nabla}g_2 = \lambda_1 \begin{pmatrix} \sin\alpha \\ 0 \\ -\cos\alpha \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= (-mg\cos\alpha\sin\alpha,\ 0,\ mg\cos^2\alpha) \qquad |\vec{Z}| = mg\cos\alpha$$

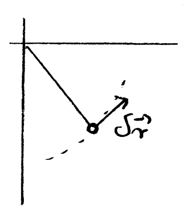


→ diese Komponente wird durch die Zwangskraft aufgehoben

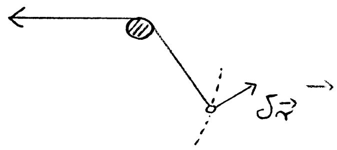
Einschub: das D'Alembert - Prinzip

Def.: „virtuelle Verrückung" $\delta\vec{r}$

→ infinitesimale Änderungen des Ortsvektors $\vec{r}$, die zu feste Zeit t mit den Zwangsbedingungen verträglich ist



→ $\delta\vec{r}$ ist tangential zur Bahn für konstante Fadenlänge variable Fadenlänge :



$\rightarrow$ $\delta\vec{r}$ <u>nicht</u> tangential zur Bahn

in beiden Fällen gilt aber: $\quad \delta\vec{r} \perp \vec{\nabla} g_\alpha(\vec{r},t)$

Prinzip von d'Alembert $\longrightarrow$ Zwangskräfte leisten bei virtuellen Verrückungen insgesamt keine Arbeit

$$\boxed{\sum_i \vec{Z}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0} \qquad \text{vgl. mit} \quad \vec{Z} \parallel \vec{\nabla} g(\vec{r},t)$$

aus $m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \vec{Z}_i$ folgt dann

$$\boxed{\sum_i (m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i) \cdot \delta\vec{r}_i = 0} \quad (*)$$

$\longrightarrow$ Zwangskräfte aus den Bewegungsgln eliminiert !

die LG2 werden im folgenden <u>nicht</u> mit Hilfe von Gl. (*) hergeleitet

<u>Lagrangegleichungen 2. Art</u>

wir betrachten ein System von N Massenpunkten mit R Zwangsbedingungen

$\Rightarrow$ Anzahl der Freiheitsgrade $\quad f = 3N - R$

der entscheidende Schritt:

die Wahl von f geeigneten „verallgemeinerten Koordinaten"

$$q_1, q_2, \dots, q_f \qquad \text{(auch: „generalisierte Koordinaten")}$$

- die q_i legen die Koordinaten der Massenpunkte fest :

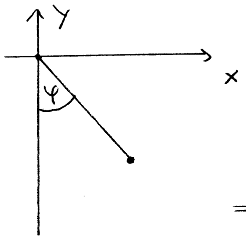
$$x_n = x_n(q_1, q_2, \dots, q_f, t) \qquad n = 1, \dots 3N$$

- die Zwangsbedingungen sind für <u>beliebige</u> Werte der q_i erfüllt :

$$g_\alpha\big(x_1(q_1, \dots, q_f, t), \dots, x_{3N}(q_1, \dots, q_f, t), t\big) = 0$$

Beispiele

- das ebene Pendel



$$\left.\begin{array}{l} N = 1 \\ R = 2 \end{array}\right\} f = 1$$

wähle als verallgemeinerte Koordinate $q = \varphi$

$$\Rightarrow \quad x_1 = x = x(\varphi, t) = \ell(t) \sin\varphi$$
$$x_2 = y = y(\varphi, t) = -\ell(t) \cos\varphi$$
$$x_3 = z = z(\varphi, t) = 0$$

damit sind die Zwangsbedingungen für beliebige φ automatisch erfüllt:

$$g_1(\vec{r}, t) = z = z(\varphi, t) = 0$$

$$g_2(\vec{r}, t) = x(\varphi, t)^2 + y(\varphi, t)^2 - \ell(t)^2 = \ell(t)^2 \left[\sin^2\varphi + \cos^2\varphi - 1\right] = 0$$

$\rightarrow$ die Zwangsbedingungen stellen keine Einschränkung für die φ-Bewegung dar

- Massenpunkt auf einer Kugeloberfläche $\longrightarrow$ $\left.\begin{array}{l} N = 1 \\ R = 1 \end{array}\right\} f = 2$

Zwangsbedingung: $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$

verallgemeinerte Koordinaten: $q_1 = \Theta$, $q_2 = \varphi$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = x(\Theta, \varphi) = R \sin\Theta \cos\varphi \\ y = y(\Theta, \varphi) = R \sin\Theta \sin\varphi \\ z = z(\Theta, \varphi) = R \cos\Theta \end{array}\right\} g(x(\Theta,\varphi), y(\Theta,\varphi), z(\Theta,\varphi)) = 0$$

für beliebige Werte von Θ und φ

verallgemeinerte Geschwindigkeiten

$$\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt}$$

$\rightarrow$ Kurznotation: $q = (q_1, \ldots, q_f)$, $\dot{q} = (\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_f)$

im Folgenden:

schreibe die kinetische und potentielle Energie als Funktion von $q, \dot{q}, t$

$$\rightarrow \quad T(q, \dot{q}, t) \quad \text{und} \quad U(q, \dot{q}, t)$$

Kinetische Energie:

$$T = \sum_{i=1}^{3N} \frac{1}{2} m_n \dot{x}_n^2 \longrightarrow \quad x_n = x_n(q,t)$$

$$\dot{x}_n = \frac{d}{dt} x_n(q,t)$$

für das ebene Pendel:

$$\dot{x}_1 = \dot{\ell} \sin\varphi + \ell \dot{\varphi} \cos\varphi = \dot{x}_1(\varphi, \dot{\varphi}, t)$$

$$\dot{x}_2 = -\dot{\ell} \cos\varphi + \ell \dot{\varphi} \sin\varphi = \dot{x}_2(\varphi, \dot{\varphi}, t)$$

$$\dot{x}_3 = 0$$

allgemein:

$$\frac{d}{dt} x_n(q,t) = \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial x_n}{\partial q_k} \underbrace{\frac{dq_k}{dt}}_{=\dot{q}_k} + \frac{\partial x_n}{\partial t} = \dot{x}_n(q, \dot{q}, t)$$

T für das ebene Pendel:

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{\ell} \sin\varphi + \ell \dot{\varphi} \cos\varphi)^2 + \frac{1}{2} m (-\dot{\ell} \cos\varphi + \ell \dot{\varphi} \sin\varphi)^2 =$$

$$= \frac{1}{2} m (\dot{\ell}^2 + \ell^2 \dot{\varphi}^2) = T(\varphi, \dot{\varphi}, t)$$

allgemein:

$$T(q, \dot{q}, t) = \sum_{n=1}^{3N} \frac{1}{2} m_n \left[\sum_{k=1}^{f} \frac{\partial x_n}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial x_n}{\partial t} \right]^2 = \ldots$$

$$\ldots = \sum_{i,k=1}^{f} m_{ik}(q,t)\, \dot{q}_i \dot{q}_k + \sum_{k=1}^{f} b_k(q,t)\, \dot{q}_k + c(q,t)$$

potentielle Energie:

hier nur Kräfte F_n, die durch ein Potential $U(x)$ dargestellt werden können

$$F_n = -\frac{\partial U(x)}{\partial x_n}$$

für das ebene Pendel: $\quad \vec{F} = -mg\,\vec{e}_y \quad \Rightarrow \quad U = mgy$

d.h. $\quad U(x_1, x_2, x_3) = mgx_2 = -mg\,\ell(t) \cos\varphi = U(\varphi, t)$

allgemein:

$$U(x) = U(x_1, x_2, \ldots, x_{3N}) = U(x_1(q_1, \ldots, q_f, t), \ldots, x_{3N}(q_1, \ldots, q_f, t))$$

$$= U(q_1, \ldots, q_f, t) = U(q,t)$$

Definition:

Lagrangefunktion der nichtrelativistischen Mechanik

$$\boxed{L(q,\dot{q},t) = T(q,\dot{q},t) - U(q,t)}$$

damit lassen sich die Lagrangegleichungen 2. Art aufstellen (L62):

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial q_k}} \qquad k = 1,\dots,f \qquad \text{(Herleitung später)}$$

↳ ein System von f Differentialgleichungen 2. Ordnung für die verallgemeinerten Bahnkurven $q_k(t)$

Beispiele:

a) ebenes Pendel — siehe oben: $T(\varphi,\dot{\varphi},t) = \frac{1}{2}m(\dot{\ell}^2 + \ell^2\dot{\varphi}^2)$

$$U(\varphi,t) = -mg\ell\cos\varphi$$

$$\Rightarrow \quad L(\varphi,\dot{\varphi},t) = \frac{1}{2}m(\dot{\ell}^2 + \ell^2\dot{\varphi}^2) + mg\ell\cos\varphi$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m\ell^2\dot{\varphi}, \qquad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = -mg\ell\sin\varphi$$

die Bewegungsgleichung lautet also:

$$\underbrace{\frac{d}{dt}(m\ell^2\dot{\varphi})} = -mg\ell\sin\varphi$$

$$= m2\ell\dot{\ell}\dot{\varphi} + m\ell^2\ddot{\varphi} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\ddot{\varphi} + \frac{g}{\ell}\sin\varphi + 2\frac{\dot{\ell}\dot{\varphi}}{\ell} = 0} \quad (*)$$

die Aufgabe → Lösung der Dgl. (*) für vorgegebenes $\ell(t)$

speziell: $\ell(t) = \text{const} \rightarrow \dot{\ell} = 0$

$$\Rightarrow \quad \ddot{\varphi} + \frac{g}{\ell}\sin\varphi = 0$$

zusätzlich: kleine Auslenkungen, d.h. $\sin\varphi \approx \varphi$

$$\Rightarrow \quad \ddot{\varphi} + \frac{g}{\ell}\varphi = 0$$

allgemeine Lösung: $\varphi(t) = a\cos\omega t + b\sin\omega t \qquad \omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$

b, freies Teilchen

→ Lagrangeformalismus auch anwendbar für Systeme ohne Zwangbedingungen

hier: $N = 1,\ R = 0 \quad \Rightarrow \quad f = 3$

- generalisierte Koordinaten: $q_1 = x$

$$q_2 = y$$

$$q_3 = z$$

$$\Rightarrow \quad T = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 \right) = \frac{1}{2} m \sum_{i=1}^{3} \dot{q}_i^2$$

$$U(x) = U(q)$$

$$\Rightarrow \quad L = T - V = \frac{1}{2} m \sum_{i=1}^{3} \dot{q}_i^2 - U(q_1, q_2, q_3) = L(q, \dot{q})$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = m \dot{q}_j \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial q_j} = - \frac{\partial U}{\partial q_j} = F_j$$

LG2: $\frac{d}{dt} m \dot{q}_j = F_j \qquad \boxed{m \ddot{q}_j = F_j}$ ok

die allgemeine Strategie lautet also:

1. Wahl der verallgemeinerten Koordinaten $q = (q_1, \dots, q_f)$ und Angabe der Transformationen $x_n(q, t)$
2. Bestimmung der Lagrangefunktion $L(q, \dot{q}, t)$
3. Aufstellung der Bewegungsgleichungen (LG2)
4. Lösung der Bewegungsgleichungen
5. Bestimmung der Integrationskonstanten

Herleitung der LG2

es gilt: $g_\alpha(x_1(q,t), \dots, x_{3N}(q,t), t) = 0$ für beliebige Werte der q_i

d.h. die g_α hängen nicht von den q_i ab!

$$\Rightarrow \quad \frac{dg_\alpha}{dq_k} = 0 \quad \longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{3N} \frac{\partial g_\alpha}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial q_k} = 0 \qquad k = 1, \dots, f$$

hiermit eliminieren wir die Zwangskräfte!

LG1 : $m_n \ddot{x}_n = F_n + \sum_{\alpha=1}^{R} \lambda_\alpha \frac{\partial g_\alpha}{\partial x_n} \quad \Big| \cdot \frac{\partial x_n}{\partial q_k}$ und $\sum_n$

$$\sum_{n=1}^{3N} m_n \ddot{x}_n \frac{\partial x_n}{\partial q_k} = \sum_{n=1}^{3N} F_n \frac{\partial x_n}{\partial q_k} + \underbrace{\sum_{\alpha=1}^{R} \lambda_\alpha \underbrace{\sum_{n=1}^{3N} \frac{\partial g_\alpha}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial q_k}}_{=0}}_{=0} \qquad (*1)$$

als nächstes : bilde $\frac{d}{dt} x_n(q,t) = \sum_{k=1}^{f} \underbrace{\frac{\partial x_n}{\partial q_k}}_{\text{Vorfaktor von } \dot{q}_k} \dot{q}_k + \frac{\partial x_n}{\partial t} =: \dot{x}_n(q,\dot{q},t)$ [→ p11]

d.h. $\dot{x}_n$ ist hiermit als Funktion von $q, \dot{q}$ und t definiert

und es gilt : $\boxed{\frac{\partial \dot{x}_n}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial x_n}{\partial q_k}}$ $(*2)$

Kinetische Energie : $T = \sum_{n=1}^{3N} \frac{1}{2} m_n \dot{x}_n^2 = T(q,\dot{q},t)$

bilde die partiellen Ableitungen $\frac{\partial T}{\partial q_k}$ und $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}$

$$\frac{\partial T(q,\dot{q},t)}{\partial q_k} = \sum_{n=1}^{3N} m_n \dot{x}_n \frac{\partial \dot{x}_n}{\partial q_k} \qquad (*3)$$

$$\frac{\partial T(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}_k} = \sum_{n=1}^{3N} m_n \dot{x}_n \frac{\partial \dot{x}_n}{\partial \dot{q}_k} \overset{(*2)}{=} \sum_{n=1}^{3N} m_n \dot{x}_n \frac{\partial x_n}{\partial q_k}$$

→ davon die Ableitung nach der Zeit:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \sum_{n=1}^{3N} m_n \underbrace{\frac{d}{dt} \left[\dot{x}_n \frac{\partial x_n}{\partial q_k} \right]}_{= \left(\frac{d}{dt} \dot{x}_n\right) \frac{\partial x_n}{\partial q_k} + \dot{x}_n \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_n}{\partial q_k}\right)} = \dots$$

$$= \left(\frac{d}{dt} \dot{x}_n\right) \frac{\partial x_n}{\partial q_k} + \dot{x}_n \underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_n}{\partial q_k}\right)}_{\overset{!}{=} \frac{\partial \dot{x}_n}{\partial q_k}}$$

→ Beweis :

$\frac{\partial x_n}{\partial q_k}$ ist eine Funktion von q und t

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial x_n}{\partial q_k} = \sum_{l=1}^{f} \frac{\partial}{\partial q_l} \frac{\partial x_n}{\partial q_k} \underbrace{\frac{dq_l}{dt}}_{\dot{q}_l} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial x_n}{\partial q_k} = \frac{\partial}{\partial q_k} \underbrace{\left[\sum_{l=1}^{f} \frac{\partial x_n}{\partial q_l} \dot{q}_l + \frac{\partial x_n}{\partial t} \right]}_{= \frac{d}{dt} x_n} \quad ✓$$

$$\ldots = \underbrace{\sum_{n=1}^{3N} m_n \ddot{x}_n \frac{\partial x_n}{\partial q_k}}_{\overset{(*1)}{=} \sum_{n=1}^{3N} F_n \frac{\partial x_n}{\partial q_k}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{3N} m_n \dot{x}_n \frac{\partial \dot{x}_n}{\partial q_k}}_{\overset{(*3)}{=} \frac{\partial T}{\partial q_k}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = \sum_{n=1}^{3N} F_n \frac{\partial x_n}{\partial q_k}} \qquad (*4)$$

<u>Definition:</u>

verallgemeinerte Kraft: $\boxed{Q_k = \sum_{n=1}^{3N} F_n \frac{\partial x_n}{\partial q_k}}$

gegeben sei ein Potential $U(x)$, so daß $F_n = -\frac{\partial U(x)}{\partial x_n}$

$$U(x) \rightarrow U(x_1(q,t), \ldots, x_{3N}(q,t)) = U(q_1, \ldots q_f, t) = U(q,t)$$

betrachte jetzt die partielle Ableitung $\frac{\partial}{\partial q_k} U(q,t)$

$$\frac{\partial U(q,t)}{\partial q_k} = \sum_{n=1}^{3N} \underbrace{\frac{\partial U(x)}{\partial x_n}}_{=-F_n} \frac{\partial x_n}{\partial q_k} = -\sum_{n=1}^{3N} F_n \frac{\partial x_n}{\partial q_k} = -Q_k$$

„verallgemeinerte" Kraft wegen $F_n = -\frac{\partial U(x)}{\partial x_n} \longrightarrow Q_k = -\frac{\partial U(q,t)}{\partial q_k}$

aus $(*4)$ folgt damit:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = -\frac{\partial U}{\partial q_k} + \frac{d}{dt}\underbrace{\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k}}_{=0}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\underbrace{(T-U)}_{=L} = \frac{\partial}{\partial q_k}\underbrace{(T-U)}_{=L} \qquad \Rightarrow \text{LG2} \quad \boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial L}{\partial q_k}}$$

Vergleich mit LG1: LG1: $3N + R$ Gleichungen
LG2: $3N - R$ Gleichungen

allgemein

> Ein mechanisches System wird durch die Wahl der verallgemeinerten Koordinaten und durch die Angabe der Lagrangefunktion definiert.

Anfangsbedingungen: $2f$ Werte für $q_i(0)$ und $\dot q_i(0)$

$\rightarrow$ legen den Systemzustand zur Zeit $t=0$ fest

$\rightarrow$ die LG2 bestimmen den Systemzustand zu beliebigen Zeiten t

Erhaltungsgrößen

Falls die Lagrangefunktion die Zeit nicht explizit enthält, also $\frac{\partial L}{\partial t}=0$, gilt folgender Erhaltungssatz:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot q_k}\dot q_k - L = \text{const.}} \qquad (*)$$

Beweis:

$$\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{f}\frac{\partial L}{\partial \dot q_k}\dot q_k = \sum_{k=1}^{f}\dot q_k \underbrace{\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_k}\right)}_{\overset{LG2}{=}\frac{\partial L}{\partial q_k}} + \sum_{k=1}^{f}\frac{\partial L}{\partial \dot q_k}\underbrace{\frac{d}{dt}\dot q_k}_{=\ddot q_k} \qquad (1)$$

$$\frac{d}{dt}L \underset{\uparrow\, L=L(q,\dot q,t)}{=} \sum_{k=1}^{f}\frac{\partial L}{\partial q_k}\underbrace{\frac{dq_k}{dt}}_{=\dot q_k} + \sum_{k=1}^{f}\frac{\partial L}{\partial \dot q_k}\underbrace{\frac{d\dot q_k}{dt}}_{=\ddot q_k} + \frac{\partial L}{\partial t} \qquad (2)$$

bilde die Differenz (1) - (2):

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_{k=1}^{f}\frac{\partial L}{\partial \dot q_k}\dot q_k - L\right] = -\frac{\partial L}{\partial t} \qquad \checkmark$$

weitere Annahmen:

- die q_α sind unabhängig von t

$$\Rightarrow \quad x_n = x_n(q) \quad \text{und} \quad T = \sum_{i,k=1}^{f} m_{ik}(q)\,\dot q_i \dot q_k = T(q,\dot q)$$

[siehe p11]

- $U = U(q,t)$

$$\Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{f}\frac{\partial L}{\partial \dot q_k}\dot q_k - L = \sum_{k=1}^{f}\underbrace{\frac{\partial T}{\partial \dot q_k}}_{=\frac{\partial}{\partial \dot q_k}\sum_{il} m_{il}(q)\,\dot q_i \dot q_l \;=\; 2\sum_{i=1}^{f} m_{ik}(q)\,\dot q_i}\dot q_k - (T-U) = \ldots$$

$$\ldots = 2T - (T-U) = T+U = E \quad \text{Gesamtenergie}$$

in diesem Fall wird $(*)$ zum Energieerhaltungssatz $\boxed{E = T+U = \text{const.}}$

Zyklische Koordinaten

eine verallgemeinerte Koordinate q_k heißt zyklisch, wenn sie nicht explizit in der Lagrangefunktion vorkommt, d.h. $\frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$

aus LG2 folgt dann: $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = 0 \Rightarrow \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}}_{=: p_k} = \text{const.}$

$=: p_k$ verallgemeinerter Impuls

es gilt also folgender Erhaltungssatz: $\boxed{\frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \longrightarrow p_k = \text{const}}$

Beispiel: Freies Teilchen

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2} m \sum_{i=1}^{3} \dot{q}_i^2 \quad ; \quad \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \ , \quad p_k = m\dot{q}_k = \text{const}$$

$\longrightarrow$ der Impuls $\vec{p} = m\dot{\vec{r}}$ ist konstant

B.2 Variationsprinzipien

a) Variation ohne Nebenbedingungen

die allgemeine Problemstellung:

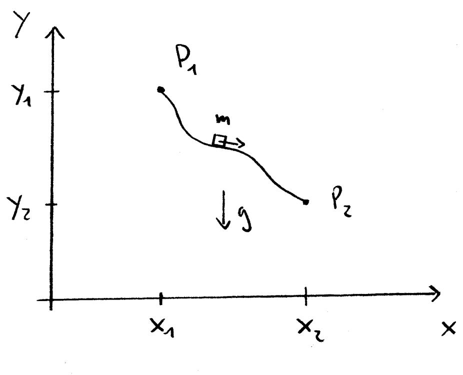
$\longrightarrow$ betrachte das Funktional $\boxed{J = J[y] = \int_{x_1}^{x_2} dx\, F(y, y', x)}$

dabei ist F eine gegebene Funktion von $y = y(x)$, $y' = \frac{d}{dx} y(x)$ und x

Randwerte: $y(x_1) = y_1$, $y(x_2) = y_2$ ebenfalls vorgegeben

gesucht: die Funktion $y(x)$ für die das Funktional $J[y]$ minimal wird.

Beispiel: Problem der Brachistochronen



- Körper (Masse m) gleitet reibungsfrei auf Bahnkurve $y(x)$ von P_1 nach P_2
- Anfangsgeschwindigkeit $= 0$

$\longrightarrow$ auf welcher Kurve kommt der Körper am schnellsten von P_1 nach P_2?

sei Δt die Zeit, die der Körper für den Weg von $P_1 \to P_2$ braucht

$\to$ Δt ist ein Funktional der Bahnkurve $y(x)$: $\Delta t = J[y]$

<u>Konstruktion des Funktionals</u>

kinetische Energie : $T = \frac{1}{2} m v^2$

potentielle Energie : $U = mg(y - y_1)$

$\Big]$ Gesamtenergie $T + U = 0$ am Punkt P_1

$T + U$ ist erhalten $\Rightarrow$ $\frac{1}{2} m v^2 = mg(y_1 - y)$; $v = \sqrt{2g(y_1 - y)}$

$$v = \frac{ds}{dt} \quad \longrightarrow \quad dt = \frac{ds}{v}$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \quad \longrightarrow \quad ds = dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = dx\sqrt{1 + y'^2}$$

das gesamte Zeitintervall Δt lässt sich berechnen über :

$$\Delta t = \int_1^2 dt = \int_1^2 \frac{ds}{v} = \int_{x_1}^{x_2} dx \underbrace{\frac{\sqrt{1 + y'(x)^2}}{\sqrt{2g(y_1 - y(x))}}}_{= F(y, y', x)} = J(y)$$

im folgenden : die gesuchte Funktion $y(x)$ lässt sich darstellen als Lösung einer Differentialgleichung

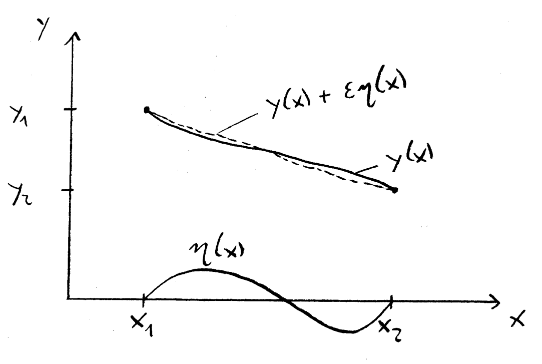
<u>Euler - Lagrange - Gleichung</u>

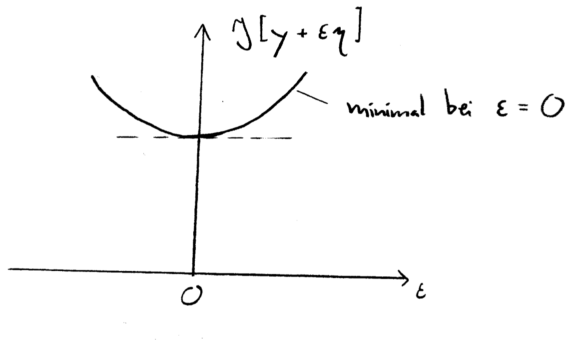
$y(x)$ sei jetzt die gesuchte Funktion

$\Rightarrow$ $J[y + \delta y] > J[y]$ für eine beliebige infinitesimale Abweichung $\delta y(x)$ von $y(x)$

schreibe : $\delta y(x) = \varepsilon \eta(x)$ mit ε infinitesimal

$\eta(x)$ beliebig, aber :
- η differenzierbar
- $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$





$y(x), \eta(x)$ fest $\Rightarrow$ $J[y+\varepsilon\eta]$ ist eine Funktion von ε

für die gesuchte Funktion $y(x)$ muss gelten:

$$\left(\frac{d\, J[y+\varepsilon\eta]}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = 0 \qquad \text{für beliebiges } \eta(x)$$

es gilt: $$J[y+\varepsilon\eta] = \int_{x_1}^{x_2} dx\, F(y+\varepsilon\eta, y'+\varepsilon\eta', x)$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} dx \left[F(y,y',x) + \frac{\partial F(y,y',x)}{\partial y}\varepsilon\eta(x) + \frac{\partial F(y,y',x)}{\partial y'}\varepsilon\eta'(x)\right] + O(\varepsilon^2)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{dJ[y+\varepsilon\eta]}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = \int_{x_1}^{x_2} dx \left[\frac{\partial F(y,y',x)}{\partial y}\eta(x) + \frac{\partial F(y,y',x)}{\partial y'}\eta'(x)\right] = \ldots$$

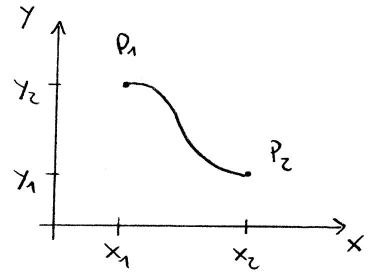
partielle Integration: $$\int_{x_1}^{x_2} dx\, \frac{\partial F}{\partial y'}\eta' = \underbrace{\frac{\partial F}{\partial y'}\eta\Big|_{x_1}^{x_2}}_{=0 \text{ wegen } \eta(x_1)=\eta(x_2)=0} - \int_{x_1}^{x_2} dx \left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)' \eta(x)$$

$$\ldots = \int_{x_1}^{x_2} dx \left[\frac{\partial F(y,y',x)}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F(y,y',x)}{\partial y'}\right]\eta(x) = 0 \qquad \text{für beliebige } \eta(x)$$

daraus folgt die Euler-Lagrange-Gleichung der Variationsrechnung

$$\boxed{\frac{d}{dx}\frac{\partial F(y,y',x)}{\partial y'} = \frac{\partial F(y,y',x)}{\partial y}}$$

<u>Beispiel:</u> Kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten



$$\Delta s = \int_1^2 ds = \int_{x_1}^{x_2} dx\, \underbrace{\sqrt{1+y'^2}}_{=F(y,y',x)} = J(y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{1}{2}\frac{2y'}{\sqrt{1+y'^2}}, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

Euler-Lagrange-Gleichung $$\frac{d}{dx}\underbrace{\frac{y'(x)}{\sqrt{1+y'(x)^2}}}_{=\text{const}} = 0$$

$\Rightarrow \quad y'(x) = \text{const.} \quad \rightarrow \quad y = ax + b$

d.h. kürzeste Verbindung : Gerade ; a,b festgelegt durch $y(x_1) = y_1$, $y(x_2) = y_2$

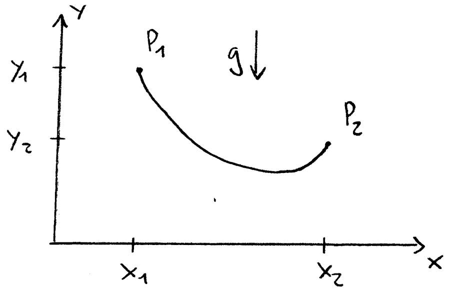
Korrespondenz zu den Lagrangegleichungen der Mechanik

$$x \rightarrow t \;,\quad y \rightarrow q \;,\quad F(y,y',x) \rightarrow L(q,\dot{q},t)$$

$\Rightarrow$ die Euler-Lagrange-Gleichungen sind identisch mit LG2

b) Variation mit Nebenbedingung

Beispiel:



ein Seil der Länge L wird im Schwerefeld an den Punkten P_1 und P_2 aufgehängt

$\longrightarrow$ in der Gleichgewichtslage ist die potentielle Energie minimal

$$dU = dm\, g\, y \;,\quad dm = \varrho\, ds \;,\quad ds = dx \sqrt{1 + y'^2}$$

ϱ $\hookrightarrow$ Dichte (Masse/Länge)

gesucht ist also die Funktion $y(x)$, die folgendes Funktional minimiert:

$$J[y] = \Delta U = \int_1^2 dU = \int_{x_1}^{x_2} dx\, g\varrho\, y(x) \sqrt{1 + y'(x)^2}$$

Randwerte: $y(x_1) = y_1$, $y(x_2) = y_2$

Achtung: Länge des Seils ist vorgegeben, d.h. das gesuchte $y[x]$ muss die Nebenbedingung

$$k[y] = L = \int_1^2 ds = \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{1 + y'(x)^2} = \text{const.}$$

erfüllen.

schreibe: $\quad J[y] = \int_{x_1}^{x_2} dx\, F(y,y',x) \;,\quad K[y] = \int_{x_1}^{x_2} dx\, G(y,y',x)$

Def.: $\quad F^*(y,y',x) = F(y,y',x) - \lambda\, G(y,y',x)$

mit $\lambda \in \mathbb{R}$: Lagrange-Multiplikator

das so definierte F^* muss die Euler-Lagrange Gleichung erfüllen

$$\boxed{\frac{d}{dx}\,\frac{\partial\mathcal{F}^*(y,y';x)}{\partial y'} = \frac{\partial\mathcal{F}^*(y,y';x)}{\partial y}}$$ [Beweis später]

setze $g\varrho = 1$ $\longrightarrow$ $\mathcal{F} = y\sqrt{1+y'^2}$, $G = \sqrt{1+y'^2}$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{F}^* = \sqrt{1+y'^2}\,(y-\lambda)$$

$\mathcal{F}^*$ hängt nicht explizit von x ab, daher gilt folgender Erhaltungssatz:

$$\boxed{\frac{\partial\mathcal{F}^*}{\partial y'}\,y' - \mathcal{F}^* = \text{const.}}$$

$$\frac{\partial\mathcal{F}^*}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\,(y-\lambda) \longrightarrow \frac{\partial\mathcal{F}^*}{\partial y'}\,y' - \mathcal{F}^* = -\frac{y-\lambda}{\sqrt{1+y'^2}} = -a \qquad (*)$$

$$\longrightarrow \boxed{y'^2 = \frac{1}{a^2}(y-\lambda)^2 - 1}$$

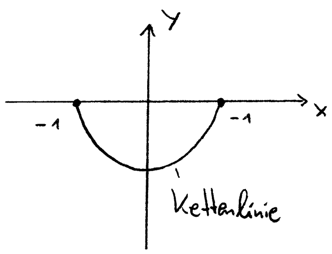
diese Differentialgleichung wird erfüllt durch $y(x) = \lambda + a\cosh\left(\frac{x}{a}+b\right)$

$$\rightarrow \quad y'(x) = \sinh\left(\frac{x}{a}+b\right)$$

$$y'^2 = \left[\sinh\left(\frac{x}{a}+b\right)\right]^2 = \left[\cosh\left(\frac{x}{a}+b\right)\right]^2 - 1 \qquad \text{ok}$$

die Parameter a, b, λ werden bestimmt durch
$y(x_1) = y_1$
$y(x_2) = y_2$
$\int_{x_1}^{x_2} dx\,\sqrt{1+y'^2} = L$

speziell:



$(x_1, y_1) = (-1, 0)$

$(x_2, y_2) = (1, 0)$

$$\Rightarrow \quad b = 0\,, \quad \lambda = -a\cos\frac{1}{a} \quad \longrightarrow \quad \boxed{y(x) = a\cosh\frac{x}{a} - a\cosh\frac{1}{a}}$$

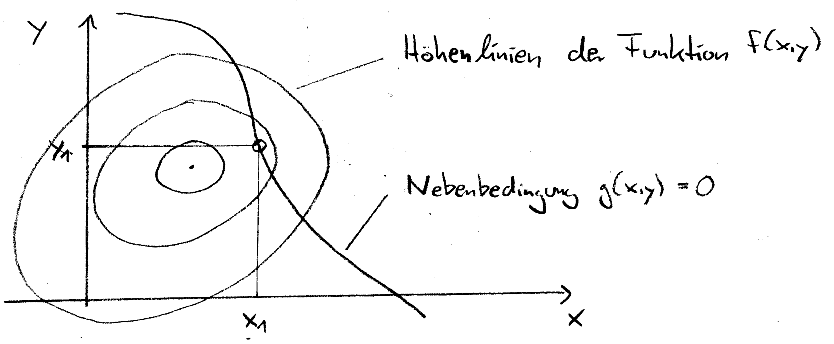
der Parameter a wird durch die Länge L festgelegt

aus $(*)$ folgt: $\sqrt{1+y'^2} = \frac{1}{a}(y-\lambda) = \cosh\frac{x}{a}$

Einsetzen in $L = \int_{-1}^{1} dx \sqrt{1+y'^2}$

$$= \int_{-1}^{1} dx \cosh \frac{x}{a} = a \left[\sinh \frac{x}{a} \right]_{-1}^{1} = 2a \sinh \frac{1}{a}$$

Extremum einer Funktion unter Nebenbedingungen



gesucht sind die Werte x_1 und y_1 für die $f(x,y)$ unter der Nebenbedingung $g(x,y) = 0$ minimal wird.

Annahme: $g(x,y) = 0$ kann nach $y = y_g(x)$ aufgelöst werden

$\longrightarrow$ bestimme das Minimum von $f(x, y_g(x))$

$$\frac{d}{dx} f(x, y_g(x)) = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y_g(x)) + \frac{\partial}{\partial y} f(x, y_g(x))\, y_g'(x) = 0 \qquad (*)$$

$\longrightarrow$ Gleichung zur Bestimmung von x_1

jetzt: Lösung dieser Aufgabe mit Hilfe von Lagrange-Multiplikatoren

betrachte die folgenden drei Gleichungen:

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) - \lambda \frac{\partial}{\partial x} g(x,y) = 0 \\ &\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) - \lambda \frac{\partial}{\partial y} g(x,y) = 0 \\ &g(x,y) = 0 \end{aligned}} \qquad (*2)$$

Behauptung: $(*2)$ ist äquivalent zu $(*)$

Beweis: die Nebenbedingung läßt sich auch schreiben als $g(x,y) = y - y_g(x) = 0$

$$\frac{\partial}{\partial x} g(x,y) = -y_g'(x) \longrightarrow \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) + \lambda\, y_g'(x) = 0 \qquad (\mathrm{I})$$

$$\frac{\partial}{\partial y} g(x,y) = 1 \longrightarrow \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) - \lambda = 0 \qquad (\mathrm{II})$$

bilde (I) + y_g' · (II) :

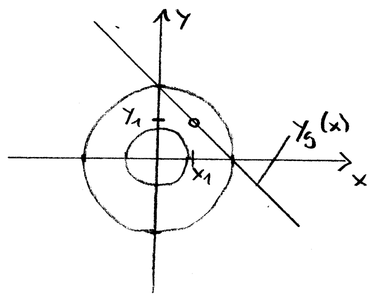
$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) + y_g'(x)\frac{\partial}{\partial y} f(x,y)}_{\hat{=}\ (*)\ \text{für}\ y \to y_g(x)} = -\lambda y_g'(x) + \lambda y_g'(x) = 0$$

d.h. jede Lösung von (*2) ist auch eine Lösung von (*)

(*2) lässt sich auch so formulieren:

$$\boxed{\begin{aligned} &f^*(x,y) = f(x,y) - \lambda g(x,y) \quad \text{minimal} \\ &g(x,y) = 0 \end{aligned}}$$

<u>Beispiel</u>: $f(x,y) = x^2+y^2$; $g(x,y) = y+x-1$



i) $y_g(x) = 1-x \quad \to f(x, y_g(x)) = 2x^2-2x+1 = h(x)$

$\to h'(x) = 4x-2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{1}{2}$

$y_1 = y_g(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$

ii) mit Lagrange-Multiplikator

$$f^*(x,y) = f(x,y) - \lambda g(x,y) = x^2+y^2 - \lambda(y+x-1)$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x} f^*(x,y) = 2x-\lambda = 0 \quad \to \quad x = \frac{\lambda}{2} \\ &\frac{\partial}{\partial y} f^*(x,y) = 2y-\lambda = 0 \quad \to \quad y = \frac{\lambda}{2} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &g(x,y) = \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{2} - 1 = \lambda - 1 = 0 \\ &\Rightarrow \lambda = 1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow x_1 = y_1 = \frac{1}{2}$ ok.

Zurück zum Problem der Kettenlinie

d.h. $$J[y] = \int_{x_1}^{x_2} dx\, F(y,y',x) = \text{minimal}$$

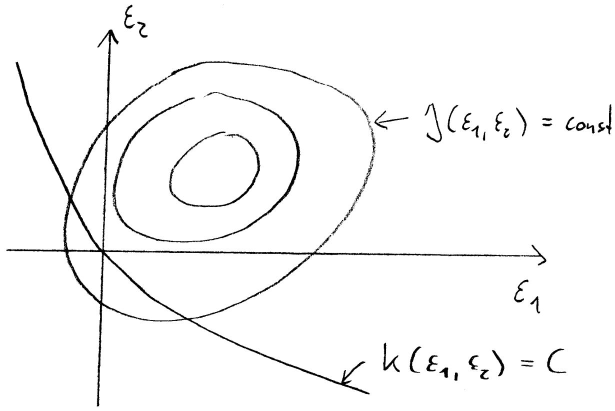
unter der Nebenbedingung $$K[y] = \int_{x_1}^{x_2} dx\, G(y,y',x) = C$$

sei $y(x)$ die gesuchte Funktion $\to$ betrachte die Abweichung $\delta y = \varepsilon_1 \eta_1(x) + \varepsilon_2 \eta_2(x)$

mit $\eta_1(x), \eta_2(x)$ zwei linear unabhängigen Funktionen

$\rightarrow \quad J(\varepsilon_1, \varepsilon_2) := J[y + \varepsilon_1 \eta_1 + \varepsilon_2 \eta_2]$

$\quad\quad K(\varepsilon_1, \varepsilon_2) := K[y + \varepsilon_1 \eta_1 + \varepsilon_2 \eta_2]$



Vergleich mit der vorherigen Aufgabenstellung:

$\rightarrow$ $f(x,y)$ extremal unter der Nebenbedingung $g(x,y) = 0$

<u>hier:</u> $J(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ extremal unter der Nebenbedingung $K(\varepsilon_1, \varepsilon_2) - C = 0$

$\Rightarrow \quad J(\varepsilon_1, \varepsilon_2) - \lambda\left(K(\varepsilon_1, \varepsilon_2) - C\right)$ minimal $\quad \rightarrow \quad J(\varepsilon_1, \varepsilon_2) - \lambda K(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ minimal

d.h. $\quad \left(\frac{\partial}{\partial \varepsilon_i}(J - \lambda K)\right)_{\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0} = 0 \quad$ für beliebige $\eta_1(x), \eta_2(x)$.

wie zuvor folgt auch hier die Euler-Lagrange-Gleichung, und zwar für das Funktional

$$J^*[y] = J[y] - \lambda K[y] = \int_{x_1}^{x_2} dx \, \underbrace{\left[F(y,y',x) - \lambda G(y,y',x)\right]}_{=: F^*(y,y',x)}$$

$$\rightarrow \quad \boxed{\frac{d}{dx} \frac{\partial F^*(y,y',x)}{\partial y'} = \frac{\partial F^*(y,y',x)}{\partial y}}$$

<u>das Hamiltonsche Prinzip</u>

die Lagrangegleichungen 2. Art lauten: $\quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L(q,\dot q,t)}{\partial \dot q_k} = \frac{\partial L(q,\dot q,t)}{\partial q_k} \quad k = 1, \ldots f$

dieselbe Struktur wie die Euler-Lagrange-Gleichung der Variationsrechnung!

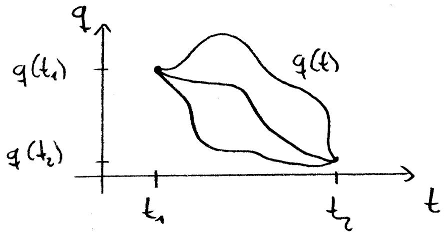
$\rightarrow$ wie sieht das Funktional $S[q]$ aus, das für die Lösung $q(t)$ der LG2 minimal wird?

$$\boxed{S = S[q] = \int_{t_1}^{t_2} dt \; L(q,\dot q,t)}$$

S : Wirkung

$S[q]$: Wirkungsfunktional

Hamiltonsches Prinzip : $\boxed{\delta S[q] = 0}$ das Wirkungsfunktional ist stationär

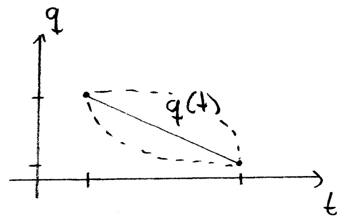


für die richtige Bahn ist $S[q]$ minimal

Beispiel : $L(q,\dot{q}) = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - U(q)$

zunächst für $U(q) = 0$

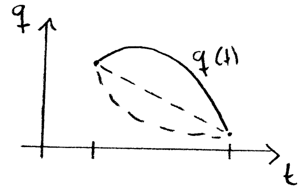
$$\rightarrow \quad S[q] = \int_{t_1}^{t_2} dt \, \frac{1}{2} m \dot{q}^2$$



$S[q]$ ist minimal für $\dot{q} = \text{const}$

jetzt für $U(q) = mgq$

$$\rightarrow \quad S[q] = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{1}{2} m \dot{q}^2 - mgq \right]$$



Noethertheorem

$\rightarrow$ allgemeine Formulierung des Zusammenhangs zwischen Symmetrien und Erhaltungssätzen auf der Grundlage des Hamiltonschen Prinzips

> Jede einparametrige Schar von Transformationen, unter der die Wirkung invariant ist, führt zu einer Erhaltungsgröße

betrachte die folgenden Transformationen

$$q_i \rightarrow q_i^* = \Psi_i(q,\dot{q},t;\varepsilon) = q_i + \varepsilon\, \psi_i(q,\dot{q},t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

$$t \rightarrow t^* = \Phi(q,\dot{q},t;\varepsilon) = t + \varepsilon\, \varphi(q,\dot{q},t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

mit beliebigen (differenzierbaren) Funktionen ψ_i und φ

Falls die Wirkung $S[q]$ invariant ist unter diese Transformation, also

B.3 Hamiltonformalismus

verallgemeinerter Impuls $\quad p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad$ auch: Kanonischer Impuls

im Folgenden: die verallgemeinerten Geschwindigkeiten $\dot{q}_i$ werden zugunsten der p_i eliminiert

$$p_i = \frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}_i} \quad \text{auflösen nach den } \dot{q} \longrightarrow \dot{q}_k = \dot{q}_k(q,p,t)$$

Abkürzungen (wie üblich): $\quad q = (q_1, \dots, q_f) \;,\; \dot{q} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f) \;,\; p = (p_1, \dots, p_f)$

Def.: Hamiltonfunktion

$$\boxed{H(q,p,t) = \sum_{i=1}^{f} \dot{q}_i(q,p,t)\, p_i - L(q, \dot{q}(q,p,t), t)}$$

H ist damit als Funktion von q, p, t definiert

Beispiel: ebene Bewegung eines freien Massenpunkts in Polarkoordinaten

Verallgemeinerte Koordinaten: ϱ, φ

Lagrangefunktion: $\quad L(\varrho, \dot{\varrho}, \dot{\varphi}) = \frac{m}{2}(\dot{\varrho}^2 + \varrho^2 \dot{\varphi}^2)$

die verallgemeinerten Impulse:

$$\left.\begin{aligned} p_\varrho &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\varrho}} = m\dot{\varrho} \\ p_\varphi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m\varrho^2\dot{\varphi} \end{aligned}\right\} \text{ Auflösen nach } \dot{\varrho}, \dot{\varphi}$$

$$\longrightarrow \quad \dot{\varrho} = \frac{p_\varrho}{m} \;,\quad \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{m\varrho^2}$$

für die Hamiltonfunktion folgt damit:

$$\begin{aligned} H &= \dot{\varrho}\, p_\varrho + \dot{\varphi}\, p_\varphi - \frac{m}{2}(\dot{\varrho}^2 + \varrho^2\dot{\varphi}^2) \\ &= \frac{p_\varrho^2}{m} + \frac{p_\varphi^2}{m\varrho^2} - \frac{m}{2}\left(\frac{p_\varrho^2}{m^2} + \varrho^2 \frac{p_\varphi^2}{m^2\varrho^4}\right) = \frac{p_\varrho^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2m\varrho^2} = H(\varrho, p_\varrho, p_\varphi) \end{aligned}$$

jetzt: berechne (allgemein) die partiellen Ableitungen der Hamiltonfunktion

$$\frac{\partial H}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^{f} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_k} p_i - \frac{\partial L}{\partial q_k} - \sum_{i=1}^{f} \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}}_{= p_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_k} = -\frac{\partial L}{\partial q_k} \underset{(L62)}{=}$$

$$= -\frac{d}{dt}\underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)}_{= p_k} = -\dot{p}_k \qquad (\mathrm{I})$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_k} = \sum_{i=1}^{f} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial p_k} p_i + \dot{q}_k - \sum_{i=1}^{f} \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}}_{=p_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial p_k} = \dot{q}_k \qquad (\mathrm{II})$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \sum_{i=1}^{f} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial t} p_i - \sum_{i=1}^{f} \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}}_{=p_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial t} - \frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \qquad (\mathrm{III})$$

(I) und (II) sind die Kanonischen oder Hamiltonschen Gleichungen

$$\boxed{\dot{p}_k = -\frac{\partial H(q,p,t)}{\partial q_k} \quad , \quad \dot{q}_k = \frac{\partial H(q,p,t)}{\partial p_k}} \qquad (k = 1,\dots,f)$$

das sind $2f$ Differentialgleichungen 1. Ordnung

LG2: f — " — 2. — " —

<u>Beispiel:</u> Bewegung eines Teilchens in einem Potential $U(\vec{r})$, keine Zwangsbedingung

Lagrange-Funktion: $L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(x,y,z)$

verallgemeinerte Impulse $p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \longrightarrow \dot{x} = \frac{p_x}{m}$; p_y, p_z analog

Hamiltonfunktion: $H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + U(x,y,z) = \frac{\vec{p}^2}{2m} + U(\vec{r},t)$

mit $\vec{p} = (p_x, p_y, p_z)$

Kanonische Gleichungen für die x-Bewegung:

$$\dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial x} \quad ; \quad \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m}$$

zusammenfassen in Vektorform: $\left.\begin{aligned} \dot{\vec{p}} &= -\vec{\nabla} U \\ \dot{\vec{r}} &= \frac{\vec{p}}{m} \end{aligned}\right\} \quad m\ddot{\vec{r}} = -\vec{\nabla} U$ ok

<u>Erhaltungsgrößen</u>

$$H = \sum_{i=1}^{f} \dot{q}_i p_i - L \longrightarrow \frac{dH}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\sum_{i=1}^{f} \dot{q}_i p_i - L\right]$$

$$= \frac{d}{dt}\left[\sum_{i=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L\right] \overset{!}{=} -\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

↑ Skript p16

d.h.: falls H nicht explizit von der Zeit abhängt, also $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$,

so ist H selbst eine Erhaltungsgröße : $\frac{dH}{dt} = 0 \quad \longrightarrow \quad H = \text{const}$

Annahme: T hängt nur quadratisch von den $\dot{q}_i$ ab ; $U = U(q)$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = 2T \qquad \text{dann gilt:} \quad H = 2T - (T - U) = T + U$$

d.h. die Hamiltonfunktion ist gleich der Gesamtenergie!

Phasenraum

der Zustand eines Systems ist festgelegt durch die Angabe der $2f$ Werte

$$q_1, \dots, q_f \quad \text{und} \quad p_1, \dots, p_f$$

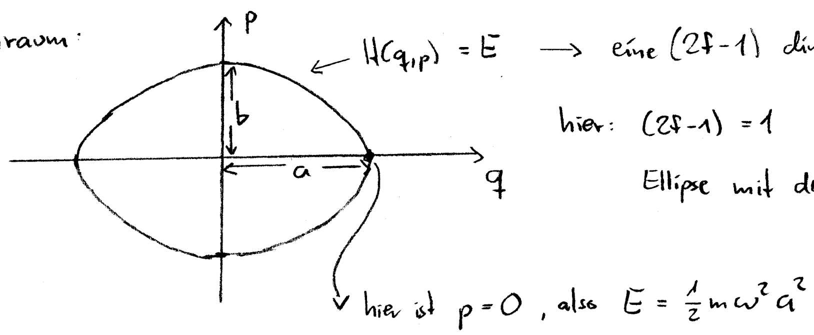
d.h. jeder Zustand entspricht einem Punkt im $2f$-dimensionalen Phasenraum

zeitliche Entwicklung eines Systems $\longrightarrow$ Trajektorie im Phasenraum

Beispiel: eindimensionaler harmonischer Oszillator

Hamiltonfunktion : $H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 q^2$

Phasenraum:



$H(q,p) = E \longrightarrow$ eine $(2f-1)$ dimensionale Fläche im Phasenraum

hier: $(2f-1) = 1$

Ellipse mit den Halbachsen $a = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}$

$b = \sqrt{2mE}$

die durch $H(q_1, \dots q_f, p_1, \dots, p_f) = E$ definierte Fläche schließt das $2f$-dimensionale Phasenraumvolumen $V_{PR}(E)$ ein :

$$V_{PR}(E) = \int_{H(q,p)<E} \dots \int dp_1 \dots dp_f \, dq_1 \dots dq_f$$

für den harmonischen Oszillator : $V_{PR}(E) = \iint_{H(q,p)<E} dp\, dq = \pi a b = \frac{2\pi E}{\omega}$

Poissonklammer

System beschrieben durch q_i und p_i

$\longrightarrow$ physikalische Größen hängen ab von $q_1, \ldots, q_s, p_1, \ldots p_s, t$

betrachte zwei solche Größen, F und k

$$F = F(q,p,t) \quad , \quad k = k(q,p,t)$$

Def.: Poissonklammer
$$\boxed{\{F,k\} = \sum_{i=1}^{f} \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial k}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial k}{\partial q_i} \right)}$$

es gilt: $\{F,k\} = -\{k,F\}$, $\{F,F\} = 0$

Beispiele:

- $k = q_j$: $\{F, q_j\} = \sum_{i=1}^{f} \Big(\frac{\partial F}{\partial q_i} \underbrace{\frac{\partial q_j}{\partial p_i}}_{=0} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \underbrace{\frac{\partial q_j}{\partial q_i}}_{=\delta_{ij}} \Big) = -\frac{\partial F}{\partial p_j}$

- $k = p_j$: $\{F, p_j\} = \frac{\partial F}{\partial q_j}$

$\Rightarrow$ $\{q_i, q_j\} = -\frac{\partial q_i}{\partial p_j} = 0$; $\{p_i, p_j\} = \frac{\partial p_i}{\partial q_j} = 0$

$\{q_i, p_j\} = \frac{\partial q_i}{\partial q_j} = \delta_{ij}$

jetzt: Berechnung der Zeitabhängigkeit einer beliebigen physikalischen Größe $F(q,p,t)$

$$\frac{dF}{dt} = \sum_{i=1}^{f} \frac{\partial F}{\partial q_i} \underbrace{\frac{dq_i}{dt}}_{=\dot q_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}} + \sum_{i=1}^{f} \frac{\partial F}{\partial p_i} \underbrace{\frac{dp_i}{dt}}_{=\dot p_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}} + \frac{\partial F}{\partial t} = \ldots$$

Kanonische Gleichungen

$$\ldots = \underbrace{\sum_{i=1}^{f} \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right)}_{=\{F,H\}} + \frac{\partial F}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{dF}{dt} = \{F,H\} + \frac{\partial F}{\partial t}}$$

sei $\frac{\partial F}{\partial t} = 0$ $\Rightarrow$ F ist genau dann eine Erhaltungsgröße, wenn $\{F,H\} = 0$

z.B.: $F = H \;\longrightarrow\; \{H,H\} = 0$

$$\longrightarrow \quad \frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}$$ [siehe p. 28]

$\Rightarrow$ alternative Form der kanonischen Gleichungen

$$\boxed{\dot{p}_i = \{p_i, H\} \quad , \quad \dot{q}_i = \{q_i, H\}}$$

$\hookrightarrow$ folgt aus $\frac{dp_i}{dt} = \{p_i, H\} + \underbrace{\frac{\partial p_i}{\partial t}}_{=0}$

<u>Beispiel:</u> F = Schwerpunktimpuls eines Systems aus N Massenpunkten

Hamiltonfunktion: $$H = \sum_{\nu=1}^{N} \frac{\vec{p}_\nu^{\,2}}{2m_\nu} + U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$$

$\rightarrow$ Variablen: $q = (q_n) = (q_{3\nu+j-3}) \quad , \quad p = (p_n) = (p_{3\nu+j-3})$

$\nu = 1, \dots, N \quad ; \quad j = 1,2,3 \quad ; \quad n = 1, \dots, 3N$

Schwerpunktimpuls definiert durch $\vec{P} = \sum_{\nu=1}^{N} \vec{p}_\nu$

betrachte jetzt die Zeitentwicklung der x-Komponente P_x

$$\dot{P}_x = \frac{dP_x}{dt} = \{P_x, H\} + \underbrace{\frac{\partial P_x}{\partial t}}_{=0} = \sum_{n=1}^{3N} \Big(\underbrace{\frac{\partial P_x}{\partial q_n}}_{=0} \frac{\partial H}{\partial p_n} - \frac{\partial P_x}{\partial p_n} \frac{\partial H}{\partial q_n} \Big) = \dots$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_n} = \frac{\partial U}{\partial q_n}$$

$$\frac{\partial P_x}{\partial p_n} = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 3\nu + 1 - 3 = 3\nu - 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\dots = -\sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial H}{\partial q_{3\nu-2}} = -\sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial U}{\partial q_{3\nu-2}} = \sum_{\nu=1}^{N} F_{\nu,x} = F_x$$ x-Komponente der Kraft auf alle Teilchen

$$\Rightarrow \quad \dot{\vec{P}} = \vec{F}$$