Übungsaufgaben zur Vorlesung

Klassische Theoretische Physik II

Priv. Doz. Dr. R. Bulla, Dr. T. Rindler-Daller

WS 2008/09

Blatt I: Abgabetermin: 21.10.2008, 10:00

Aufgabe 1: Gradient

Bestimmen die das Gradientenfeld folgender Felder:

$$\varphi_1(\vec{r}) = r^n \quad , \quad \varphi_2(\vec{r}) = \ln(r) \quad (r = |\vec{r}|) \quad ,$$

$$\varphi_3(\vec{r}) = x \sin(yz) \quad , \quad \varphi_4(\vec{r}) = \left(\vec{B} \times \vec{r}\right) \cdot \vec{r} \quad \text{mit} \;\; \vec{B} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix}$$

(4 Punkte)

Aufgabe 2: Divergenz

Bestimmen Sie die Divergenz folgender Vektorfelder:

$$\vec{A}_1(\vec{r}) = r^n \vec{r} \;\; , \;\; \vec{A}_2(\vec{r}) = r \vec{\nabla} \left(\frac{1}{r^3}\right) \quad , \quad \vec{A}_3(\vec{r}) = \vec{\nabla}\varphi \times \vec{\nabla}\psi$$

(mit den skalaren Feldern $\varphi(\vec{r})$ und $\psi(\vec{r})$).

(3 Punkte)

Aufgabe 3: Rotation — allgemeine Rechenregeln

Beweisen Sie für allgemeine skalare Felder $\varphi(\vec{r})$ und Vektorfelder $\vec{A}(\vec{r})$ die Gleichungen:

$$\vec{\nabla} \times \left(\varphi \vec{A}\right) = \varphi \vec{\nabla} \times \vec{A} - \vec{A} \times \vec{\nabla}\varphi \quad ,$$

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}\right) - \Delta \vec{A} \quad .$$

(4 Punkte)

Aufgabe 4: Fourier-Transformation

Berechnen Sie die Fourier-Transformierte

$$g(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ikx} dx$$

folgender Funktion:

$$f(x) = \begin{cases} h(1 - a|x|) \ , & |x| < 1/a \\ 0 \ , & |x| > 1/a \end{cases}$$

Diskutieren Sie den Grenzfall $a \to \infty$ mit $a = h$, indem Sie das Ergebnis für kleine Argumente entwickeln.

(6 Punkte)

Aufgabe 5: Kontinuitätsgleichung

Leiten Sie aus den Maxwellschen Gleichungen die Kontinuitätsgleichung

$$\nabla \cdot \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

her.

(3 Punkte)

Aufgabe 6: Elliptisch polarisiertes Licht

Die Maxwellgleichungen für den feldfreien Fall erlauben Lösungen in Form von elektromagnetischen Wellen. Betrachten Sie nun das folgende Feld

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \left(\vec{E}_{0,1} + \vec{E}_{0,2}\right) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$$

mit

$$\vec{E}_{0,1} = (0, a, 0) \quad , \quad \vec{E}_{0,2} = (0, 0, 2ae^{i\pi/2}) \quad , \quad a \text{ reell} \quad , \quad \vec{k} = (k, 0, 0) \ .$$

a) Bestimmen Sie die Zeitabhängigkeit der Polarisationsrichtungen des elektrischen und magnetischen Felds bei $\vec{r} = 0$. *Hinweis:* Verwenden Sie die Beziehung zwischen den Amplituden des elektrischen und magnetischen Feldes. Beachten Sie weiters, dass nur der Realteil der Felder physikalische Bedeutung hat.

b) Berechnen Sie die Orts- und Zeitabhängigkeit der Energiedichte u und der Energiestromdichte $\vec{S}$.
Hinweis:
$$u = \frac{1}{8\pi}\left(|\vec{E}|^2 + |\vec{B}|^2\right) \quad , \quad \vec{S} = \frac{c}{4\pi}\vec{E} \times \vec{B}$$

c) Die in b) berechneten Grössen enthalten Terme, die mit der Kreisfrequenz ω oszillieren. Bestimmen Sie nun die zeitgemittelte Energie- und Energiestromdichte.

(9 Punkte)