Übungsaufgaben zur Vorlesung

Klassische Theoretische Physik II

Priv.-Doz. Dr. R. Bulla, Dr. T. Rindler-Daller

WS 2008/09

Blatt II: Abgabetermin: 28.10.2008, 10:00

Aufgabe 6: Elliptisch polarisiertes Licht

Die Maxwellgleichungen für den quellenfreien Fall erlauben Lösungen in Form von elektromagnetischen Wellen. Betrachten Sie nun das folgende Feld

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \left(\vec{E}_{0,1} + \vec{E}_{0,2}\right) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$$

mit

$$\vec{E}_{0,1} = (0,a,0) \quad , \quad \vec{E}_{0,2} = (0,0,2ae^{i\pi/2}) \quad , \quad a \text{ reell} \quad , \quad \vec{k} = (k,0,0) \ .$$

a) Bestimmen Sie die Zeitabhängigkeit der Polarisationsrichtungen des elektrischen und magnetischen Felds bei $\vec{r} = 0$. *Hinweis:* Verwenden Sie die Beziehung zwischen den Amplituden des elektrischen und magnetischen Feldes. Beachten Sie weiters, dass nur der Realteil der Felder physikalische Bedeutung hat. Insbesondere ist im folgenden mit $\vec{E}$ bzw. $\vec{B}$ immer $Re\vec{E}$ bzw. $Re\vec{B}$ gemeint.

b) Berechnen Sie die Orts- und Zeitabhängigkeit der Energiedichte u und der Energiestromdichte $\vec{S}$.
Hinweis:
$$u = \frac{1}{8\pi}\left(|\vec{E}|^2 + |\vec{B}|^2\right) \quad , \quad \vec{S} = \frac{c}{4\pi}\vec{E}\times\vec{B}$$

c) Die in b) berechneten Größen enthalten Terme, die mit der Kreisfrequenz ω oszillieren. Bestimmen Sie nun die zeitgemittelte Energie- und Energiestromdichte.

(9 Punkte)

Aufgabe 7: Separation der Variablen

Gegeben seien folgende partielle Differentialgleichungen:

$$\text{(I)} \qquad \frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial x} + y\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = 0$$

$$\text{(II)} \qquad \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial z} + \frac{\partial\psi}{\partial z} + z\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = 0$$

Führen Sie mit Hilfe eines jeweils geeigneten Ansatzes eine Separation der Variablen durch. Auf welche gewöhnlichen Differentialgleichungen (die Sie nicht zu lösen brauchen) führt diese Separation jeweils?

(5 Punkte)

Aufgabe 8: Kugelwellen

Zeigen Sie, dass die vom Ursprung ausgehende skalare Kugelwelle

$$\psi(\vec{r}, t) = \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}$$

mit $k = \omega/c, r = |\vec{r}|$ die Wellengleichung

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\psi(\vec{r}, t) = 0$$

erfüllt.
Hinweis: Benutzen Sie den Laplaceoperator in Kugelkoordinaten.

(3 Punkte)

***Aufgabe 9: Hohlraumresonator**

In diesem Beispiel betrachten wir Wellenlösungen in einem Volumen, dass durch Metallwände begrenzt wird. Der Einfachheit halber betrachten wir einen Quader mit den Kantenlängen L_1, L_2 und L_3 in x-, y- und z-Richtung, also

$$0 \leq x \leq L_1, \quad 0 \leq y \leq L_2, \quad 0 \leq z \leq L_3.$$

Die Wellenlösungen müssen natürlich die Wellengleichungen (siehe Vorlesung) erfüllen und die Randbedingungen sind folgendermaßen festgelegt: wegen der freien Verschiebbarkeit von Ladungen im Metall verschwinden die Tangentialkomponenten des elektrischen Feldes am Rand. Gemeinsam mit den Maxwellgleichungen folgt daraus, dass die Normalkomponente des magnetischen Feldes am Rand verschwindet. Suchen Sie Lösungen der Wellengleichung für das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r}, t)$ mit obiger Randbedingung und diskutieren Sie das Resultat.
Hinweis: Betrachten Sie vorab eine Komponente, z.B. die x-Komponente. Die x-Komponente E_1 *ist* Tangentialkomponente an den Wänden $y = 0, y = L_2, z = 0, z = L_3$, d.h. die Randbedingung hat hier die Form $E_1(x, 0, z, t) = 0 = E_1(x, L_2, z, t)$ und $E_1(x, y, 0, t) = 0 = E_1(x, y, L_3, t)$. Verwenden Sie einen Separationsansatz.

(10 Punkte)