Übungsaufgaben zur Vorlesung

Klassische Theoretische Physik II

Priv.-Doz. Dr. R. Bulla, Dr. T. Rindler-Daller

WS 2008/09

Blatt III: Abgabetermin: 4.11.2008, 10:00

Aufgabe 10: Dispersion eines Wellenpakets

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass Lösungen der Maxwellgleichungen in Form von Wellenpaketen nicht zerfließen. Diese Tatsache hängt aber vom Dispersionsgesetz $\omega = \omega(k)$ ab, wie im folgenden gezeigt werden soll:
Betrachten Sie das Gaußsche Wellenpaket zur Zeit $t = 0$:

$$\mathcal{F}(x, t = 0) = a e^{-\frac{x^2}{2\sigma_0^2}}$$

mit der anfänglichen Breite σ_0. Die dazugehörige Fouriertransformierte ist

$$\mathcal{F}_0(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} a e^{-\frac{x^2}{2\sigma_0^2}} e^{-ikx} dx = \frac{a\sigma_0}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(k\sigma_0)^2},$$

welche wieder ein Gaußpaket ist, aber mit der Breite $1/\sigma_0$ (siehe Skriptum S.10).
Berechnen Sie nun die Zeitentwicklung von $\mathcal{F}(x, t)$ für die beiden Dispersionsgesetze

$$\begin{array}{lrcl} \text{(I)} & \omega(k) & = & c_1 k^2 \\ \text{(II)} & \omega(k) & = & c_2 k \end{array}$$

mit den positiven Konstanten c_1 und c_2. Betrachten Sie der Einfachheit halber die Betragsquadrate, anstatt der Realteile. Wie verhält sich jeweils die Breite von $|\mathcal{F}(x, t)|^2$ als Funktion der Zeit t?

(6 Punkte)

Aufgabe 11: orthogonale Transformation

Gegeben sei ein Vektor mit der Darstellung

$$\mathbf{r} = \sum_{i=1}^{3} x_i \mathbf{e}_i = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$$

im Koordinatensystem K. Gesucht ist die Darstellung von $\mathbf{r}$ im Koordinatensystem K', d.h.

$$\mathbf{r} = \sum_{i=1}^{3} x'_i \mathbf{e}'_i,$$

wobei $\mathbf{r}$ selbst natürlich unabhängig vom Koordinatensystem ist, d.h.

$$\sum_{i=1}^{3} x_i \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^{3} x'_i \mathbf{e}'_i. \tag{1}$$

Bestimmen Sie die (3×3)-Drehmatrix $\mathcal{D}$, welche die ungestrichenen Größen in die gestrichenen überführt, $\mathbf{x}' = \mathcal{D}\mathbf{x}$ und zeigen Sie, dass das Matrixprodukt $\mathcal{D}\mathcal{D}^{-1}$ die Einheitsmatrix ergibt.

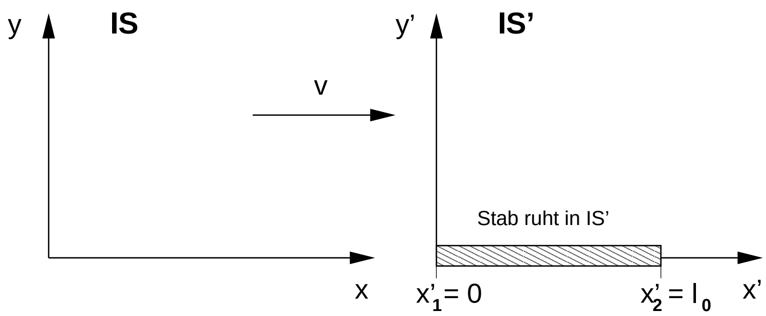
(9 Punkte)

Aufgabe 12: Lorentztransformation

Im System IS' befinde sich ein ruhender Stab auf der x'-Achse mit der Länge l_0 (also $y' = z' = 0$). Die Koordinaten des Stabanfangs und -endes seien $x'_1 = 0, x'_2 = l_0$. IS' bewegt sich in der $+x$-Richtung mit der Geschwindigkeit v. Am Stabanfang und -ende werden Lichtpulse zur IS'-Zeit $t'_n = n\Delta t, \quad n = 0, 1, 2, ...$ ausgesandt, welches Ereignisse in IS' definiert.

a) Wie lauten die Koordinaten dieser Ereignisse in IS' und IS. *Hinweis:* Man kommt vom System IS' in das System IS mittels der speziellen Lorentztransformationen aus der Vorlesung, indem man v durch $-v$ und gestrichene durch ungestrichene Größen ersetzt.

b) Die Lichtpulse breiten sich in IS als Kugelwellen aus. Berechnen Sie die Koordinaten der Wellenfronten dieser Kugelwellen.



(6 Punkte)