Übungsaufgaben zur Vorlesung

Mathematische Methoden für das Lehramt (Ba of Arts)

apl. Prof. Dr. R. Bulla

WS 2016/17

Blatt 13: Abgabetermin: Mittwoch, der 08.02.2017, 10:00

Aufgabe 1: gedämpfte Schwingung

(7 Punkte)

Gegeben sei die Newtonsche Bewegungsgleichung für ein Teilchen der Masse m an einer Feder (Federkonstante k) mit zusätzlicher Reibungskraft $F_{\mathrm{R}}(\dot{x}) = -\bar{\gamma}\dot{x}$:

$$kx(t) + \bar{\gamma}\dot{x}(t) + m\ddot{x}(t) = 0 \ .$$

a) Zeigen Sie, dass im aperiodischen Grenzfall $\gamma = \omega$ (mit $\gamma = \frac{\bar{\gamma}}{2m}$, $\omega = \sqrt{k/m}$) die allgemeine Lösung gegeben ist durch

$$x(t) = (a_1 + a_2 t)e^{-\gamma t} \ , \quad a_i \in \mathbb{R} \ . \quad \text{(2 Punkte)}$$

b) Welche Lösungen ($x_1(t)$ oder $x_2(t)$, siehe Vorlesungsskript) dominieren in den Fällen $\gamma = \omega$ und $\gamma > \omega$ für große Zeiten t? (2 Punkte)

Im Folgenden wird $k = 1$ und $m = 1$ gesetzt. Die Anfangsbedingungen sind gegeben durch $x(0) = 1$ und $\dot{x}(0) = 0$.

c) Wie lauten die Lösungen $x(t)$ für diese Anfangsbedingungen jeweils für $\gamma = \frac{1}{2}$, $\gamma = 1$ und $\gamma = 2$. (3 Punkte)

Aufgabe 2: komplexe Zahlen – Multiplikation

(6 Punkte)

Die komplexen Zahlen z_1, z_2, z_3 sind gegeben durch

$$z_1 = 1 + i \quad , \quad z_2 = -2 + 2i \quad , \quad z_3 = -i \ .$$

a) Berechnen Sie die komplexen Zahlen $p_j = iz_j$ ($j = 1, 2, 3$) ... (1 Punkt)

b) ... und $q_j = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)z_j$ ($j = 1, 2, 3$) (2 Punkte).

c) Zeichnen Sie die z_j, p_j und q_j in der komplexen Ebene. Welche anschauliche Bedeutung ergibt sich daraus für die Multiplikation der z_j mit i bzw. $\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$? (3 Punkte)

Aufgabe 3: komplexe Zahlen – Division

(3 Punkte)

Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil der komplexen Zahlen

a)
$$\frac{1}{1-i} \; ,$$

b)
$$\frac{1+i}{(2-i)^2} \; ,$$

c)
$$\frac{i-2}{2+e^{i\pi/4}} \; .$$

Aufgabe 4: komplexe Zahlen – $e^{i\varphi}$

(6 Punkte)

Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil der komplexen Zahlen

a) $2e^{-i\pi/4}$, b) $ie^{\pi i}$, c) $e^{n\pi i}$ $(n \in \mathbb{Z})$.

Schreiben Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $z = re^{i\varphi}$:

d) $2 - 2i$, e) $(-1)^n$ $(n \in \mathbb{Z})$, f) $(1+i)^n$ $(n \in \mathbb{Z})$.

Aufgabe 5: Additionstheorem

(2 Punkte)

Stellen Sie mit Hilfe der Eulerschen Formel $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ ein Additionstheorem für $\sin(3\varphi)$ auf, d.h. stellen Sie $\sin(3\varphi)$ durch Kombinationen aus $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$ dar.