

Mathematische Methoden für das Lehramt (Ba of Arts)

apl. Prof. Dr. R. Bulla

WS 2016/17

Blatt 3: Abgabetermin: Mittwoch, der 09.11.2016, 10:00

Aufgabe 1: Skalarprodukt

(6 Punkte)

Für die (beliebigen) Vektoren \vec{u} , \vec{v} und \vec{w} sind die folgenden Skalarprodukte gegeben:

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = 1, \quad \vec{v} \cdot \vec{v} = 1, \quad \vec{w} \cdot \vec{w} = 4, \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{4}, \quad \vec{u} \cdot \vec{w} = 0, \quad \vec{v} \cdot \vec{w} = \frac{3}{4},$$

Berechnen Sie für die Vektoren

$$\vec{a} = \vec{u} + \vec{w}, \quad \vec{b} = 2\vec{v} - \vec{w}, \quad \vec{c} = -\vec{u} + 3\vec{v},$$

die Beträge $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$ und $|\vec{c}|$, sowie die Skalarprodukte $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{a} \cdot \vec{c}$ und $\vec{b} \cdot \vec{c}$.

Aufgabe 2: Vektorprodukt I

(7 Punkte)

a) Zeigen Sie für beliebige Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ die Identität

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}.$$

(3 Punkte)

b) Zeigen Sie für beliebige Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ die Identität

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2. \quad (1)$$

(3 Punkte)

c) Zeigen Sie, ausgehend von Gl. (1) und $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi$ die folgende Gleichung:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi.$$

(1 Punkt)

Aufgabe 3: Vektorprodukt II

(5 Punkte)

Gegeben sind die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- a) Zeigen Sie anhand dieses Beispiels, dass für das Vektorprodukt das Assoziativgesetz i.A. nicht gilt, also

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}.$$

(2 Punkte)

- b) Berechnen Sie die Flächeninhalte der von den Vektorpaaren $\{\vec{a}, \vec{b}\}$, $\{\vec{a}, \vec{c}\}$ und $\{\vec{b}, \vec{c}\}$ aufgespannten Parallelelogramme. (3 Punkte)

Aufgabe 4: Kronecker-Delta

(3 Punkte)

Das Kronecker-Delta ist definiert als

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & : i = j, \\ 0 & : i \neq j. \end{cases}$$

Berechnen Sie die folgenden Summen

$$\sum_{i=1}^3 a_i \delta_{i3}, \quad \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 b_i c_j \delta_{ij}, \quad \sum_{i=1}^3 (\delta_{ii} + \delta_{ij}).$$

Hinweis: In der dritten Summe nimmt j den Wert 1, 2 oder 3 an.

Aufgabe 5: Teilchenbahnen in Polarkoordinaten

(6 Punkte)

Skizzieren Sie die folgenden, durch $r(t)$ und $\varphi(t)$ gegebenen Teilchenbahnen:

- a) $r(t) = vt$, $\varphi(t) = \frac{\pi}{2}$.
b) $r(t) = R$, $\varphi(t) = t^2$.
c) $r(t) = \frac{1}{2}t^2$, $\varphi(t) = \frac{3\pi}{2}$.