

## Mathematische Methoden für das Lehramt (Ba of Arts)

apl. Prof. Dr. R. Bulla

WS 2016/17

**Blatt 4:** Abgabetermin: Mittwoch, der 16.11.2016, 10:00

### Aufgabe 1: Teilchenbahnen in Kugelkoordinaten

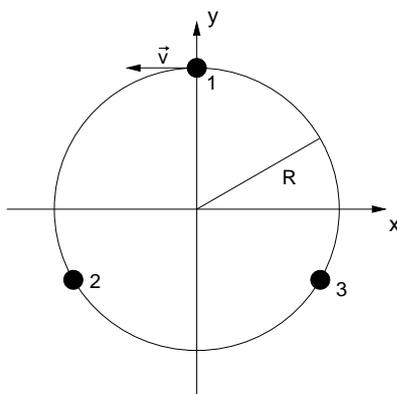
(4 Punkte)

Skizzieren Sie die folgenden, durch  $r(t)$ ,  $\vartheta(t)$  und  $\varphi(t)$  gegebenen Teilchenbahnen:

- a)  $r(t) = R$ ,  $\vartheta(t) = t$ ,  $\varphi(t) = \pi$ ,  $0 \leq t \leq \pi$ . (1 Punkt)
- b)  $r(t) = R$ ,  $\vartheta(t) = \frac{\pi}{2}$ ,  $\varphi(t) = t$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ . (1 Punkt)
- c)  $r(t) = R$ ,  $\vartheta(t) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \sin(t)$ ,  $\varphi(t) = t$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ . (2 Punkte)

### Aufgabe 2: Drei-Körper-Problem

(6 Punkte)



Betrachten Sie das in der Abbildung dargestellte Drei-Körper-Problem, bei dem sich drei Körper mit Massen  $m_i = m$  auf einer Kreisbahn mit Radius  $R$  um den Ursprung bewegen. Der Betrag der Geschwindigkeiten ist für alle Körper konstant,  $|\vec{v}_i(t)| = v$ , die drei Körper liegen damit immer auf den Ecken eines rotierenden gleichseitigen Dreiecks.

- a) Geben Sie die Bahnen  $\vec{r}_i(t)$  der drei Körper an. Hinweis: Die Abbildung zeigt die Positionen zur Zeit  $t = 0$ . (2 Punkte)
- b) Bestimmen Sie für die in der Abbildung dargestellte Geometrie die Kraft  $\vec{F}$  auf den Körper 1 aufgrund der Gravitationskraft, die durch die beiden anderen Körper auf diesen ausgeübt wird. Dabei ist die Gravitationskraft gegeben

durch:

$$\vec{F}_{ij} = -Gm_i m_j \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3} .$$

(2 Punkte)

- c) Wie groß muss  $v$  sein, damit der Körper 1 auf der Kreisbahn mit Radius  $R$  bleibt? (2 Punkte)

### Aufgabe 3: Integration

(7 Punkte)

- a) Zeigen Sie geometrisch, dass für die folgenden bestimmten Integrale gilt:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(x) \, dx = 0 . \quad (1 \text{ Punkt})$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(x) \, dx = \pi . \quad (1 \text{ Punkt})$$

- b) Berechnen Sie:

$$\int_0^1 e^x \, dx . \quad (1 \text{ Punkt})$$

$$\int_{-1}^1 \left( \sum_{n=1}^N x^n \right) dx . \quad (2 \text{ Punkte})$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(x) \cos(x) \, dx . \quad (2 \text{ Punkte})$$

Hinweis zur Bestimmung der Stammfunktion von  $\sin(x) \cos(x)$ : Betrachten Sie die Ableitung von  $\sin^n(x)$ .