Übungsaufgaben zur Vorlesung

Mathematische Methoden für das Lehramt (Ba of Arts)

apl. Prof. Dr. R. Bulla

WS 2016/17

Blatt 7: Abgabetermin: Mittwoch, der 07.12.2016, 10:00

Hier eine wichtige Mitteilung der Fachschaft Physik:

*In der Woche vom 12.-16.12. wird wieder an der Uni gewählt. Angesichts dessen veranstaltet die Fachschaft am Donnerstag, den 08.12.2016, um 12:00 Uhr, im Hörsaal III eine Vollversammlung. Dort erfahrt ihr alles über die Wahlen: Was wird gewählt? Wer steht zur Wahl? Warum ist das wichtig? Außerdem werden die studentischen Vertreter*innen einiger physikinterner Gremien vor Ort auf der Vollversammlung gewählt.*

Aufgabe 1: partielle Ableitungen

(6 Punkte)

Gegeben sei die Funktion:

$$g(x, y, z) = x^2 \sin(xz) + ze^y \ .$$

a) Berechnen Sie die folgenden partiellen Ableitungen:

$$\frac{\partial g}{\partial x} \ , \quad \frac{\partial g}{\partial y} \ , \quad \frac{\partial g}{\partial z} \ .$$

(3 Punkte)

b) Zeigen Sie explizit, dass die gemischten zweiten Ableitungen unabhängig von der Reihenfolge sind, in der die Ableitungen durchgeführt werden, also:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} \ , \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 g}{\partial z \partial x} \ , \quad \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 g}{\partial z \partial y} \ .$$

(3 Punkte)

Aufgabe 2: Gradientenfelder I

(4 Punkte)

Betrachten Sie die folgenden skalaren Felder $\varphi_i(\vec{r})$ $(i = 1, 2)$ mit $\vec{r} \in \mathbb{R}^2$:

$$\varphi_1(\vec{r}) = xy \ , \quad \varphi_2(\vec{r}) = \frac{y}{x^2 + 1} \ .$$

a) Bestimmen Sie die Gradientenfelder $\vec{\nabla}\varphi_i(\vec{r})$. (2 Punkte)

b) Skizzieren Sie die Gradientenfelder $\vec{\nabla}\varphi_i(\vec{r})$, d.h. zeichnen Sie in einem zweidimensionalen Koordinatensystem die Vektoren $\vec{\nabla}\varphi_i(\vec{r}_n)$ für eine sinnvolle Auswahl an $\vec{r}_n$. (2 Punkte)

Aufgabe 3: Gradientenfelder II

(6 Punkte)

Bestimmen Sie die Gradientenfelder der folgenden skalaren Felder:

a)
$$\varphi_1(\vec{r}) = \cos(x)\cos(y)\cos(z) \ .$$

b)
$$\varphi_2(\vec{r}) = r^n \ , \ \text{mit } r = |\vec{r}| \text{ und } n \in \mathbb{N} \ .$$

c)
$$\varphi_3(\vec{r}) = f(r) \ ,$$

mit einer beliebigen Funktion $f(r)$, die nur von $r = |\vec{r}|$ abhängt. Hinweis: der Ausdruck für das Gradientenfeld enthält die Ableitung $f'(r)$.

Aufgabe 4: Kraftfeld und Potential

(3 Punkte)

Gegeben sei das Potential $V(\vec{r})$ mit $\vec{r} \in \mathbb{R}^2$:

$$V(\vec{r}) = \cos(x) + \cos(y) \ .$$

a) Bestimmen Sie das Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}V(\vec{r})$. (1 Punkt)

b) Für welche $\vec{r} \in \mathbb{R}^2$ gilt $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{0}$? (2 Punkte)

Aufgabe 5: Potential des Schwerefelds

(2 Punkte)

Für das Schwerefeld der Erde gilt näherungsweise die folgende Form für das Kraftfeld:

$$\vec{F}(\vec{r}) = m\vec{g} \ , \ \text{mit } \ \vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} \ .$$

Wie lautet das entsprechende Potential?