Übungsaufgaben zur Vorlesung

Mathematische Methoden für das Lehramt (Ba of Arts)

apl. Prof. Dr. R. Bulla

WS 2016/17

Blatt 8: Abgabetermin: Mittwoch, der 14.12.2016, 10:00

Aufgabe 1: skalare Felder, $\Delta\varphi$, $\vec{\nabla}\varphi(\vec{r})$

(4 Punkte)

Gegeben sei das skalare Feld $\varphi(\vec{r}) = xy$.

a) Berechnen Sie die Änderung des skalaren Feldes $\Delta\varphi = \varphi(\vec{r}_0 + \Delta\vec{r}) - \varphi(\vec{r}_0)$, für

$$\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \Delta\vec{r} = a \begin{pmatrix} \cos\vartheta \\ \sin\vartheta \end{pmatrix} \ , \ 0 \leq \vartheta < 2\pi \ .$$

Verwenden Sie dazu den Zusammenhang zwischen $\Delta\varphi$ und $\vec{\nabla}\varphi(\vec{r})$:

$$\Delta\varphi = \vec{\nabla}\varphi(\vec{r}) \cdot \Delta\vec{r} \ .$$

(2 Punkte)

b) Skizzieren Sie $\Delta\varphi$ als Funktion von ϑ. Für welche Werte ϑ ist $\Delta\varphi$ maximal, minimal, bzw. $= 0$? Diskutieren Sie das Ergebnis bzgl. des Zusammenhangs zwischen $\vec{\nabla}\varphi(\vec{r})$ und den Höhenlinien von $\varphi(\vec{r})$. (2 Punkte)

Aufgabe 2: Produktregel für vektorwertige Funktionen

(4 Punkte)

Zeigen Sie, dass für die Ableitung des Skalarprodukts bzw. des Vektorprodukts zweier vektorwertiger Funktionen $\vec{a}(t)$ und $\vec{b}(t)$ (mit den Komponenten $a_i(t)$, $b_i(t)$, $i = x, y, z$) die folgenden Produktregeln gelten:

a)
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{a}(t) \times \vec{b}(t)\right) = \dot{\vec{a}}(t) \times \vec{b}(t) + \vec{a}(t) \times \dot{\vec{b}}(t) \ . \qquad \text{(2 Punkte)}$$

b)
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{a}(t) \cdot \vec{b}(t)\right) = \dot{\vec{a}}(t) \cdot \vec{b}(t) + \vec{a}(t) \cdot \dot{\vec{b}}(t) \ . \qquad \text{(2 Punkte)}$$

Aufgabe 3: N**-Teilchen-System – innere Kräfte**

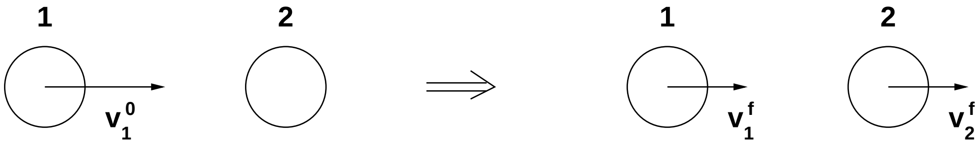
(3 Punkte)

Zeigen Sie, dass für ein N-Teilchen-System mit inneren Kräften $\vec{F}_{ij}$ zwischen Teilchen i und j gilt:

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1, j\neq i}^{N} \vec{F}_{ij} = \vec{0} \ .$$

Aufgabe 4: elastischer Stoß

(7 Punkte)

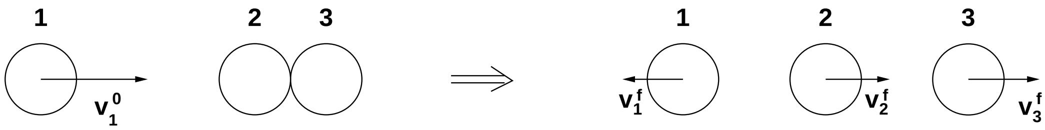


Betrachten Sie den in der Abbildung dargestellten Stoßprozess: Teilchen 1 (Masse m_1, Geschwindigkeit v_1^0) trifft auf das ruhende Teilchen 2 (Masse m_2, Geschwindigkeit $v_2^0 = 0$); nach dem Stoß haben die beiden Teilchen die Geschwindigkeiten v_1^{f} und v_2^{f}.

a) Berechnen Sie (unter der Annahme, dass Gesamtimpuls und Gesamtenergie des Systems erhalten sind) die Geschwindigkeiten v_1^{f} und v_2^{f}. (3 Punkte)

b) Was ergibt sich für den Fall $m_1 = m_2$? (2 Punkte)

Betrachten Sie jetzt den in der zweiten Abbildung dargestellten Stoßprozess mit drei Teilchen (Massen $m_i = m$, $v_2^0 = v_3^0 = 0$):



c) Zeigen Sie, dass die folgenden beiden Endzustände mit den Erhaltungssätzen verträglich sind:

$$\begin{aligned} \mathrm{I}: &\quad v_1^{\mathrm{f}} = v_2^{\mathrm{f}} = 0 \ , \ v_3^{\mathrm{f}} = v_1^0 \ , \\ \mathrm{II}: &\quad v_1^{\mathrm{f}} = -\frac{1}{3} v_1^0 \ , \ v_2^{\mathrm{f}} = v_3^{\mathrm{f}} = \frac{2}{3} v_1^0 \ . \quad \text{(2 Punkte)} \end{aligned}$$