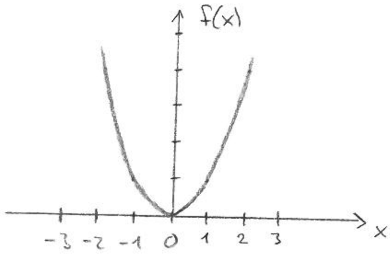
A. Differentiation

gegeben sei eine Funktion $f(x)$ (oder $x(t)$, $v(t)$, ...)

z.B.: $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$f(x) = x^2$



<u>Definition:</u> Ableitung der Funktion $f(x)$

$$\boxed{f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \underbrace{\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}}} \qquad \left(= \frac{df}{dx} \right)$$

$= \text{Differenzenquotient} = \dfrac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}$ mit $x_1 = x + \Delta x$

<u>Beispiel:</u> $f(x) = x^2$

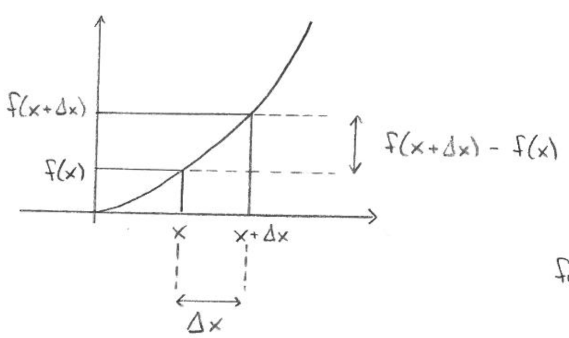
$\Rightarrow \quad f(x+\Delta x) = (x+\Delta x)^2 = x^2 + 2x\,\Delta x + (\Delta x)^2$

$f(x+\Delta x) - f(x) = 2x\,\Delta x + (\Delta x)^2$

$\dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = 2x + \Delta x$

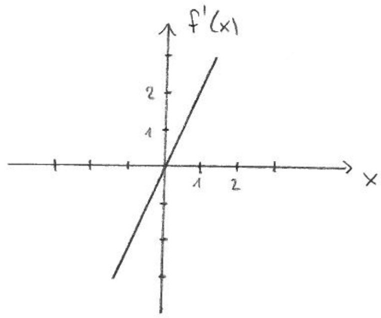
$\Rightarrow \quad f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x$

<u>geometrische Interpretation</u>



$\longrightarrow \quad f'(x) \mathrel{\hat{=}}$ Steigung der Funktion am Punkt x

für $f(x) = x^2 \longrightarrow f'(x) = 2x$



Rechenregeln

- sei $f(x) = a\,g(x) + b\,h(x)$; $a, b \in \mathbb{R}$

  $\Rightarrow f'(x) = a\,g'(x) + b\,h'(x)$

  z.B. : $f(x) = 2x + 3x^2 \longrightarrow f'(x) = 2 + 6x$

- Produktregel : sei $f(x) = g(x)\,h(x)$

  $\Rightarrow f'(x) = g(x)\,h'(x) + g'(x)\,h(x)$

  z.B. : $f(x) = x \cdot x \longrightarrow f'(x) = x \cdot 1 + 1 \cdot x = 2x$

- Kettenregel :

  Beispiel : $\left.\begin{array}{l} f(u) = u^2 \\ u(x) = x^2+1 \end{array}\right\}$ definiere die Funktion $g(x) = f(u(x))$

  $= (x^2+1)^2$

  Für die Ableitung gilt die Kettenregel $\boxed{\dfrac{dg}{dx} = \dfrac{df}{du}\,\dfrac{du}{dx}}$

  in diesem Beispiel : $\left.\begin{array}{l} \dfrac{df}{du} = 2u = 2(x^2+1) \\ \dfrac{du}{dx} = 2x \end{array}\right\}$ $\dfrac{dg}{dx} = 4x\,(x^2+1)$

  oder direkt : $g(x) = (x^2+1)^2 = x^4 + 2x^2 + 1$

  $\Rightarrow g'(x) = 4x^3 + 4x = 4x\,(x^2+1)$ ok.

- Quotientenregel :

  sei $a(x) = \dfrac{h(x)}{u(x)} = h(x) \cdot \dfrac{1}{u(x)} = h(x) \cdot g(x)$

  mit $g(x) = f(u(x)) = \dfrac{1}{u(x)}$, d.h. $f(u) = \dfrac{1}{u}$

  $\longrightarrow a'(x) = h'(x)\,g(x) + h(x)\,\underbrace{g'(x)}_{= \frac{dg}{dx} = \frac{df}{du} \underbrace{\frac{du}{dx}}_{= u'(x)}}$

mit $\frac{df}{du} = -\frac{1}{u^2}$ folgt:

$$a'(x) = \frac{h'(x)}{u(x)} - \frac{h(x)u'(x)}{u(x)^2} \quad \longrightarrow \quad \boxed{a'(x) = \frac{h'(x)u(x) - h(x)u'(x)}{u(x)^2}}$$

Speziell: $a(x) = \frac{1}{u(x)} = (u(x))^{-1}$ d.h. $h(x) = 1 \rightarrow h'(x) = 0$

$$\longrightarrow \quad a'(x) = -1\,(u(x))^{-2}\,u'(x) = -\frac{u'(x)}{u(x)^2}$$

Beispiel: $a(x) = (\cos(x))^{-1}$

$$\longrightarrow \quad a'(x) = -(\cos(x))^{-2}(-\sin(x)) = \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}$$

Ableitungen einige Standardfunktionen

- $f(x) = x^a$ mit $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

  $\longrightarrow \quad f'(x) = a\,x^{a-1}$

  für $a = 0$ gilt $f(x) = x^0 = 1 \longrightarrow f'(x) = 0$

- $f(x) = e^x \longrightarrow f'(x) = e^x$
- $f(x) = \ln(x) \longrightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$
- $f(x) = \sin(x) \longrightarrow f'(x) = \cos(x)$
- $f(x) = \cos(x) \longrightarrow f'(x) = -\sin(x)$

B. Vektoren

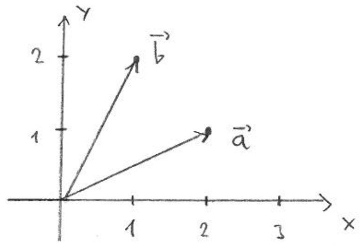
ein Vektor $\boxed{\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}}$ mit den Komponenten $a_x, a_y, a_z \in \mathbb{R}$ beschreibt einen Punkt im $\mathbb{R}^3$

$$\longrightarrow \quad \vec{a} \in \mathbb{R}^3$$

allgemein: $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ mit den Komponenten $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \qquad (\vec{a})_i \; : \; i\text{-te Komponente des Vektors } \vec{a} \;\hat{=}\; a_i$$

Beispiel: $(n=2)$



$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

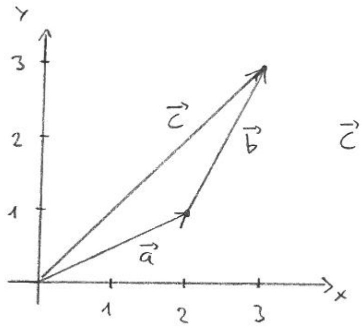
Veranschaulichung als Punkt oder Pfeil vom Ursprung

Rechenregeln

1. Addition

sei $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

$\Rightarrow \quad (\vec{c})_i = (\vec{a})_i + (\vec{b})_i$



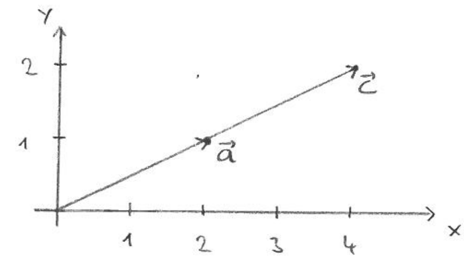
$\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

2. Multiplikation mit Zahlen

sei $\vec{c} = \alpha \vec{a}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \quad (\vec{c})_i = \alpha (\vec{a})_i$



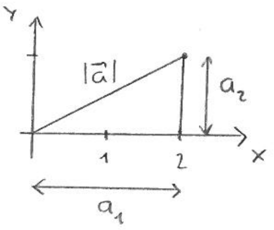
$\vec{c} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

3. Betrag (= Länge) eines Vektors

$$\boxed{|\vec{a}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}}$$

für $n = 2$: $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

$\hat{=} \quad |\vec{a}|^2 = a_1^2 + a_2^2$ (Pythagoras)



$|\vec{a}| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$

Beispiel: Betrag des Vektors $\vec{r}(t)$ eines Körpers auf einer Kreisbahn

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} r \cos(\omega t) \\ r \sin(\omega t) \end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{r}(t)| = \sqrt{r^2 \cos^2(\omega t) + r^2 \sin^2(\omega t)}$$

$$= \sqrt{r^2 \underbrace{(\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t))}_{=1}}$$

$= r$ unabhängig von t

es gilt: $|\alpha \vec{a}| = \alpha |\vec{a}|$, denn: $(\alpha \geq 0)$

$$|\alpha \vec{a}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \alpha^2 a_i^2} = \sqrt{\alpha^2 \sum_{i=1}^{n} a_i^2} = \alpha \underbrace{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}}_{= |\vec{a}|}$$

4. Einheitsvektor in Richtung $\vec{a}$

$$\boxed{\vec{e}_{\vec{a}} = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}}$$

Einheitsvektoren haben die Länge 1

$\longrightarrow |\vec{e}_{\vec{a}}| = \left|\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}\right| = \frac{1}{|\vec{a}|}|\vec{a}| = 1$

für $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \vec{e}_{\vec{a}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

5. Skalarprodukt

für zwei Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ ist das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$ definiert als:

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i}_{\text{das Ergebnis ist ein `Skalar' (= eine reelle Zahl)}}}$$

$\longrightarrow$ Abbildung $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

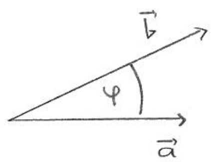
$(\vec{a}, \vec{b}) \longmapsto \vec{a} \cdot \vec{b}$

$\hookrightarrow$ im Gegensatz zu `Vektor'

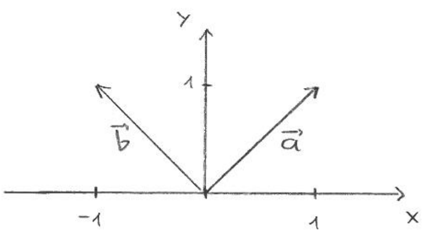
geometrische Bedeutung des Skalarprodukts

es gilt: $\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\varphi}$

φ: der von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ eingeschlossene Winkel



Beispiele:



$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

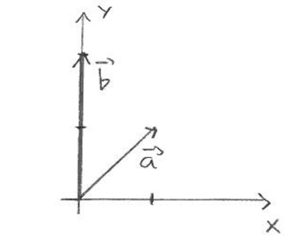
$\Longrightarrow \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = -1 + 1 = 0$

$|\vec{a}| = \sqrt{2}, \quad |\vec{b}| = \sqrt{2}, \quad \varphi = \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \quad |\vec{a}||\vec{b}| \underbrace{\cos\varphi}_{=0} = 0$$

allgemein gilt: $\boxed{\text{zwei Vektoren } \vec{a} \text{ und } \vec{b} \text{ sind orthogonal (d.h. } \varphi = \tfrac{\pi}{2}\text{), wenn } \vec{a}\cdot\vec{b} = 0}$

2tes Beispiel:



$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{a}\cdot\vec{b} = 0 + 2 = 2$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{2}, \quad |\vec{b}| = 2, \quad \varphi = \frac{\pi}{4}$$

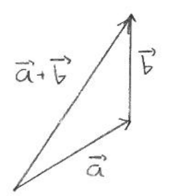
$$\Rightarrow \quad |\vec{a}||\vec{b}| \underbrace{\cos\varphi}_{=\frac{1}{2}\sqrt{2}} = 2$$

Eigenschaften des Skalarprodukts

- Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung: $\boxed{|\vec{a}\cdot\vec{b}| \leq |\vec{a}||\vec{b}|}$ (*)

  folgt direkt aus $|\vec{a}\cdot\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\underbrace{|\cos\varphi|}_{\leq 1} \leq |\vec{a}||\vec{b}|$

  $\longrightarrow$ daraus folgt die Dreiecksungleichung $\quad |\vec{a}+\vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$



denn:
$$\begin{aligned} |\vec{a}+\vec{b}|^2 &= (\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = \\ &= \vec{a}\cdot\vec{a} + \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{a} + \vec{b}\cdot\vec{b} = \\ &= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\,\vec{a}\cdot\vec{b} \leq |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2|\vec{a}\cdot\vec{b}| \\ &\underset{(*)}{\leq} \underbrace{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}|} \\ &= (|\vec{a}| + |\vec{b}|)^2 \end{aligned}$$

d.h.: $\underbrace{(|\vec{a}+\vec{b}|)^2}_{\geq 0} \leq \underbrace{(|\vec{a}|+|\vec{b}|)^2}_{\geq 0} \quad \Rightarrow \quad |\vec{a}+\vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$

für den Beweis brauchen wir noch die folgenden Eigenschaften:

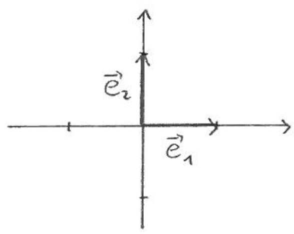
- $\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2 \qquad$ folgt aus $\quad \vec{a}\cdot\vec{a} = \sum_{i=1}^{n} a_i^2$

- das Skalarprodukt ist
  - → distributiv: $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{c} + \vec{b}\cdot\vec{c}$
  - → Kommutativ: $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$

<u>es gilt:</u> die Einheitsvektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots$ eines Koordinatensystems sind orthonormiert (= orthogonal und auf 1 normiert)

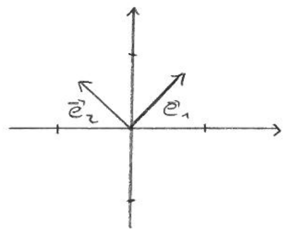
d.h.: $\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2 = 0$ etc. und $|\vec{e}_i|^2 = \vec{e}_i\cdot\vec{e}_i = 1$

z.B.



$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$\vec{e}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$



$\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$\vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$

allgemein gilt: $\boxed{\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j = \delta_{ij}}$

mit dem Kronecke-Delta $\boxed{\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i=j \\ 0 & \text{falls } i\neq j \end{cases}}$

6. Vektorprodukt

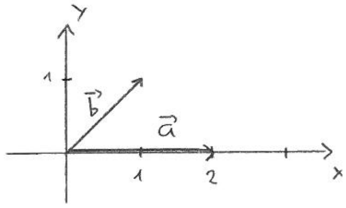
für zwei Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ ist das Vektorprodukt (auch: Kreuzprodukt) $\vec{a}\times\vec{b}$ definiert als:

$$\boxed{\vec{a}\times\vec{b} = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}a_2b_3 - a_3b_2\\a_3b_1 - a_1b_3\\a_1b_2 - a_2b_1\end{pmatrix}}_{\text{das Ergebnis ist ein Vektor!}}}$$

→ Abbildung $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$(\vec{a},\vec{b}) \longmapsto \vec{a}\times\vec{b}$

<u>Beispiel:</u> $\vec{a} = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$



$$\Rightarrow \quad \vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 - 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 - 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot 1 - 0 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

offensichtlich gilt: $\quad \vec{c} \perp \vec{a} \quad$ und $\quad \vec{c} \perp \vec{b}$

<u>allgemein</u>:

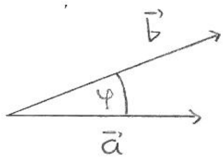
$$\boxed{\begin{array}{ll} (1) & (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} = 0 \\ (2) & (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{b} = 0 \end{array}}$$

Beweis von (1): $\quad (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) a_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) a_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) a_3 = 0$

(Beweis von (2) analog)

für den Betrag des Vektorprodukts gilt allgemein:

$$\boxed{|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\varphi} \quad (*)$$



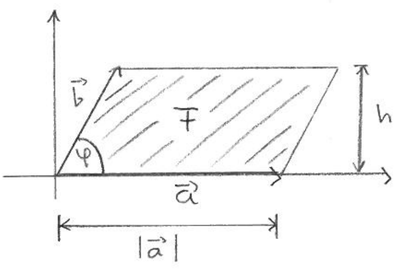
in obigem Beispiel:

$|\vec{c}| = 2 \;; \quad |\vec{a}| = 2 \;, \quad |\vec{b}| = \sqrt{2} \;, \quad \varphi = \frac{\pi}{4} \quad \rightarrow \quad \sin\varphi = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

Einsetzen in Gl. (*): $\quad 2 = 2\sqrt{2}\,\frac{1}{2}\sqrt{2} \quad$ ✓

außerdem gilt:

$$\boxed{|\vec{a} \times \vec{b}| = \text{Flächeninhalt des von } \vec{a} \text{ und } \vec{b} \text{ aufgespannten Parallelogramms}}$$



$F = |\vec{a}| \cdot h \quad , \quad h = |\vec{b}| \cdot \sin\varphi$

$\Rightarrow \quad F = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\varphi \overset{!}{=} |\vec{a} \times \vec{b}|$

<u>weitere Eigenschaften des Vektorprodukts</u>:

- das Vektorprodukt ist <u>nicht</u> kommutativ, d.h. i.A.: $\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{b} \times \vec{a}$

  statt dessen gilt: $\quad \vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

– sei $\vec{b} = \alpha \vec{a}$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \quad \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ Beweis: $(\vec{a} \times (\alpha \vec{a}))_x = a_2 \alpha a_3 - a_3 \alpha a_2 = 0$

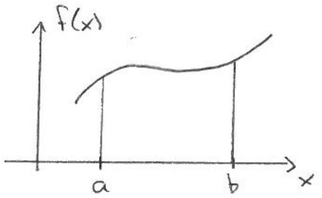
etc.

– das Vektorprodukt ist <u>nicht</u> assoziativ, d.h. i.A.:

$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \neq \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ [Beispiele siehe Übungen]

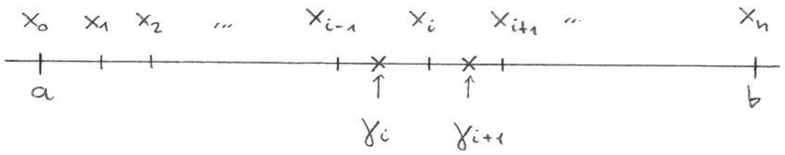
C. Integration

zunächst: das bestimmte Integral der Funktion $f(x)$ von a bis b



Symbol $\boxed{\int_a^b f(x)\, dx}$

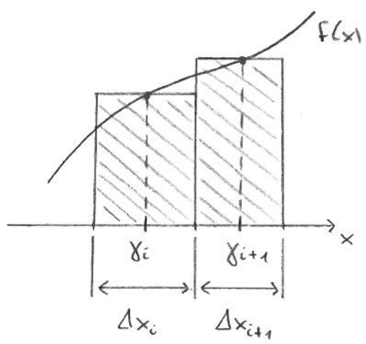
betrachte eine Zerlegung Z des Intervalls $[a,b]$:



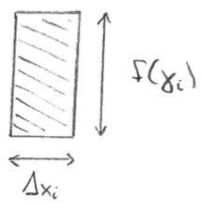
mit $x_{i-1} \leq \gamma_i \leq x_i$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, 2, \dots n$

<u>Definition</u>:

Riemann-Summe $\boxed{S(Z) = \sum_{i=1}^{n} f(\gamma_i)\, \Delta x_i}$



$S(Z)$ = Summe der Flächen

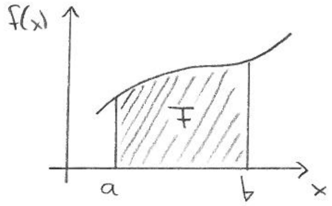


$S(Z)$ hängt von der Zerlegung ab

<u>Definition</u>: das bestimmte Integral $\boxed{\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{Z \to \infty} S(Z)}$

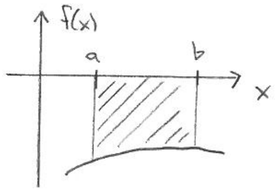
$\lim\limits_{Z \to \infty}$ bedeutet: immer feinere Zerlegungen

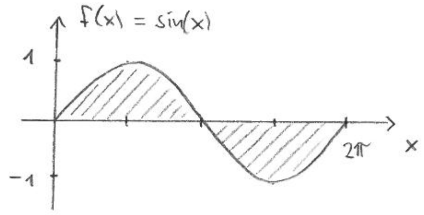
geometrische Bedeutung



$\int_a^b f(x)\,dx \;\hat{=}$ Fläche zwischen der x-Achse und den Graphen für $f(x)$, begrenzt durch $x = a$ und $x = b$

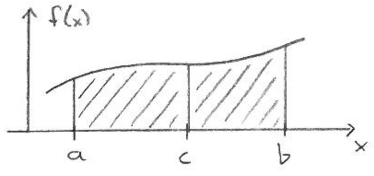
zu beachten:





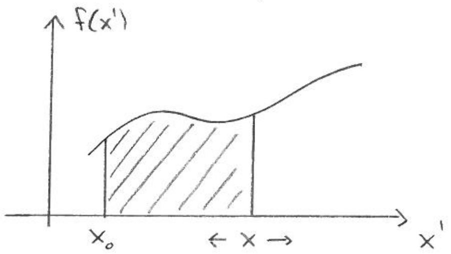
$$\int_a^b f(x)\,dx < 0 \qquad\qquad \int_0^{2\pi} \sin(x)\,dx = 0$$

einige Eigenschaften des bestimmten Integrals

- $$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$
- $$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$
- 

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$
- $$\int_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx$$
- $$\int_a^b \left(f_1(x) + f_2(x)\right) dx = \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx$$

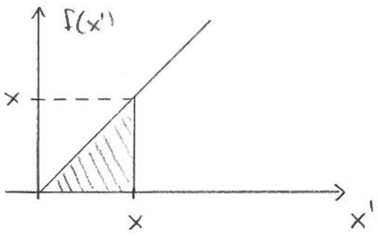
das unbestimmte Integral



die Funktion $\boxed{F(x) = \int_{x_0}^{x} f(x')\,dx'}$

ist das unbestimmte Integral von f

Beispiel: $f(x') = x'$, $x_0 = 0$



$$\longrightarrow \quad F(x) = \int_0^x x'\,dx' \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Fläche des Dreiecks}}}{\overset{!}{=}} \frac{1}{2}x^2$$

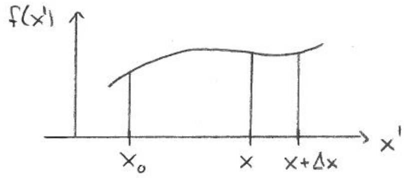
$F(x)$ heißt Stammfunktion von f, hier: $F(x) = \frac{1}{2}x^2$ ist die Stammfunktion von $f(x) = x$

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

es gilt: $\boxed{F'(x) = f(x)}$ d.h. $F \underset{\text{Integrieren}}{\overset{\text{Differenzieren}}{\rightleftarrows}} f$

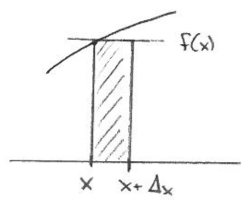
Beweis:

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x}$$



$$\underbrace{\int_{x_0}^{x} f(x')\,dx'}_{=F(x)} + \int_x^{x+\Delta x} f(x')\,dx' = \underbrace{\int_{x_0}^{x+\Delta x} f(x')\,dx'}_{=F(x+\Delta x)}$$

$$\Rightarrow \quad F(x+\Delta x) - F(x) = \underbrace{\int_x^{x+\Delta x} f(x')\,dx'}_{\underset{\substack{\uparrow \\ \text{im Limes } \Delta x \to 0}}{=} f(x)\,\Delta x}$$



und damit folgt: $F'(x) = f(x)$ ✓

Zusammenhang mit dem bestimmten Integral

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \underbrace{F(b) - F(a)}_{= \left[F(x)\right]_a^b}}$$

denn: $$\int_a^b f(x)\,dx = \underbrace{\int_a^{x_0} f(x)\,dx}_{= -\int_{x_0}^{a} f(x)\,dx = -F(a)} + \underbrace{\int_{x_0}^{b} f(x)\,dx}_{= F(b)}$$

<u>Beispiel</u> : $\int_0^2 x^3 \, dx$

$\longrightarrow$ $f(x) = x^3$ hat die Stammfunktion $F(x) = \frac{1}{4} x^4$

denn : $F'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{4} x^4\right) = \frac{1}{4} \cdot 4 \, x^3 = f(x)$

$$\Rightarrow \quad \int_0^2 x^3 \, dx = \left[\frac{1}{4} x^4 \right]_0^2 = \frac{1}{4} 2^4 - 0 = 4$$

Integration der Newtonschen Bewegungsgleichung

speziell für $F = f(t) \quad \rightarrow \quad \ddot{x}(t) = \frac{1}{m} f(t)$

$\dot{x}(t)$ ist die Stammfunktion zu $\ddot{x}(t)$

$$\Rightarrow \quad \int_a^b \ddot{x}(t') \, dt' = \dot{x}(b) - \dot{x}(a) \qquad \text{setze } a = 0, \; b = t$$

$$\Rightarrow \quad \dot{x}(t) = \dot{x}(0) + \int_0^t \ddot{x}(t') \, dt' = \dot{x}(0) + \frac{1}{m} \int_0^t f(t') \, dt'$$

analog : $x(t)$ ist die Stammfunktion zu $\dot{x}(t)$ ...

Methoden zur Berechnung von Integralen

a) Stammfunktion ist bekannt (aus $F'(x) = f(x)$)

z.B. : $f(x) = x^n \longrightarrow F(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$

$f(x) = \cos(x) \longrightarrow F(x) = \sin(x)$

etc.

$$\int_0^{\pi/2} \cos(x) \, dx = \left[\sin(x) \right]_0^{\pi/2} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(0) = 1$$

b) partielle Integration

gesucht : $\int_a^b f_1(x) f_2(x) \, dx$ $\longrightarrow$ der Integrand ist das Produkt der beiden Funktionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$

$\longrightarrow$ Annahme : die Stammfunktion zu $f_2(x)$ ist bekannt $\rightarrow F_2(x)$

<u>betrachte</u> : $\frac{d}{dx}\left[f_1(x)\, F_2(x) \right] \overset{\uparrow}{=} f_1'(x)\, F_2(x) + f_1(x) \underbrace{F_2'(x)}_{= f_2(x)}$

Produktregel

$$\Rightarrow \quad f_1(x)\, f_2(x) = \frac{d}{dx}\left[f_1(x)\, F_2(x) \right] - f_1'(x)\, F_2(x)$$

bilde $\int_a^b \ldots dx$ auf beiden Seiten und verwende $\int_a^b \left(\frac{d}{dx}\left[f_1(x)\, F_2(x) \right] \right) dx = \left[f_1(x)\, F_2(x) \right]_a^b$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\int_a^b f_1(x)\, f_2(x)\, dx = \left[f_1(x)\, F_2(x) \right]_a^b - \int_a^b f_1'(x)\, F_2(x)\, dx}$$

<u>Beispiel</u> : $\int_0^{\pi} x \cos(x)\, dx \quad \longrightarrow \quad f_1(x) = x, \quad f_2(x) = \cos(x)$

$f_1'(x) = 1, \quad F_2(x) = \sin(x)$

$$\Rightarrow \quad \int_0^{\pi} x \cos(x)\, dx = \left[x \sin(x) \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin(x)\, dx$$

$$= 0 + \left[\cos(x) \right]_0^{\pi} = -1 - 1 = -2$$

c, Substitution

Beispiel : $\int_0^1 (2x+1)^2\, dx$

$\longrightarrow$ finde eine geeignete Substitution, hier $u = 2x+1 \Rightarrow (2x+1)^2 = u^2$

$\longrightarrow$ bilde $\frac{du}{dx}$: $\frac{du}{dx} = 2 \Rightarrow dx = \frac{1}{2}\, du$

$\longrightarrow$ Integrationsgrenzen : $\int_{x=0}^{x=1} \longrightarrow \int_{u=1}^{u=3}$

damit folgt : $\int_0^1 (2x+1)^2\, dx = \frac{1}{2} \int_1^3 u^2\, du = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3} u^3 \right]_1^3$

$$= \frac{1}{6}(27 - 1) = \frac{13}{3}$$

D. skalare Felder und Vektorfelder

Motivation: viele physikalische Größen lassen sich als Felder darstellen

- Temperaturverteilung $T(\vec{r})$
- Massendichte $\rho(\vec{r})$
- Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$

} skalare Felder

- Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r})$
- elektrisches Feld $\vec{E}(\vec{r})$
- magnetisches Feld $\vec{B}(\vec{r})$

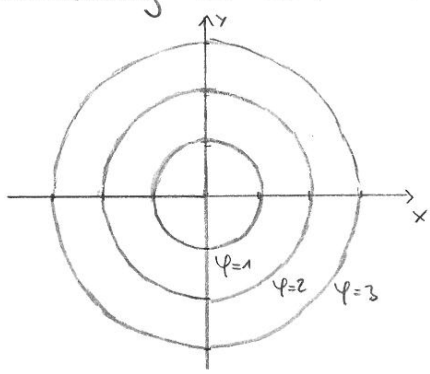
} Vektorfelde

skalare Felder

Abbildung $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

z.B.: $\varphi(\vec{r}) = |\vec{r}| = \sqrt{x^2+y^2}$ hier für $\vec{r} \in \mathbb{R}^2$

Veranschaulichung von $\varphi(\vec{r})$ $\longrightarrow$ Höhenlinien: Linien mit Konstantem $\varphi(\vec{r}) = \varphi_n$

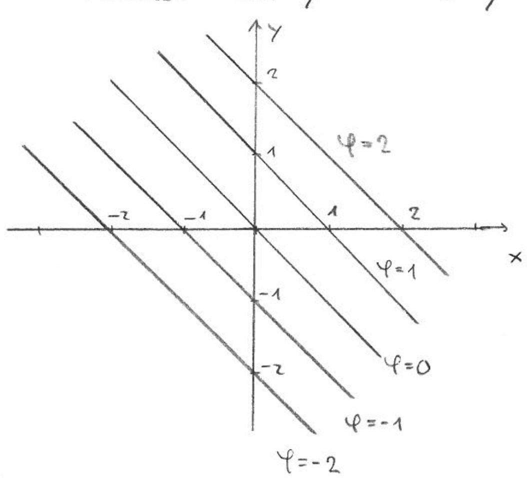


hier: Linien mit $\varphi_n = n = 1,2,3$

noch ein Beispiel: $\varphi(\vec{r}) = x + y$

$\longrightarrow$ Bestimmung der Höhenlinien mit $\varphi(\vec{r}) = \varphi_n$

$\to$ Auflösen nach y: $x + y = \varphi_n \Rightarrow y = \varphi_n - x$

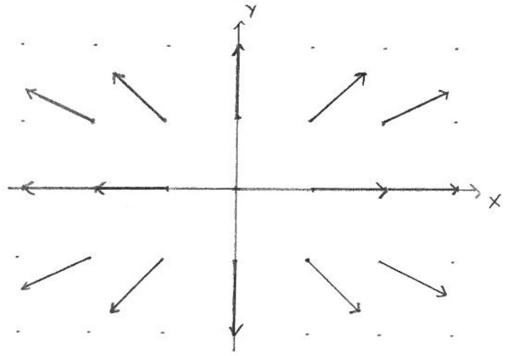


Vektorfelder

Abbildung $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

z.B.: $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \vec{e}_r$, $\vec{e}_r$: Einheitsvektor in Richtung $\vec{r}$

Veranschaulichung von $\vec{A}(\vec{r}) \longrightarrow$ zeichne die Pfeile $\vec{A}(\vec{r}_n)$, für eine Auswahl von Punkten, beginnend bei $\vec{r}_n$

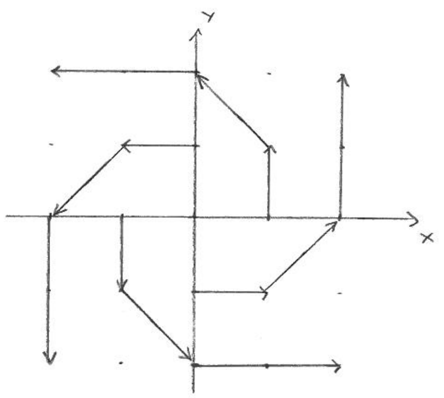


hier: $\vec{r}_n = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}$ $n_i \in \mathbb{Z}$

zweites Beispiel: $\vec{A}(\vec{r}) = \vec{a} \times \vec{r}$ mit dem konstanten Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\longrightarrow$ Veranschaulichung in der x-y-Ebene, d.h. für $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \quad \vec{A}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$



dasselbe Bild ergibt sich für $z \neq 0$, denn

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$

d.h. $\vec{A}(\vec{r})$ beschreibt einen Wirbel um die z-Achse

es gilt:
- $\vec{A}(\vec{r}) \perp \vec{a}$, $\vec{A}(\vec{r}) \perp \vec{r}$
- $|\vec{A}(\vec{r})| = |\vec{a} \times \vec{r}| = \underbrace{|\vec{a}|}_{=1} |\vec{r}| \sin\varphi \underset{\uparrow}{=} |\vec{r}|$

für $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ ist $\varphi = \frac{\pi}{2} \rightarrow \sin\varphi = 1$

d.h. $|\vec{A}(\vec{r})|$ wächst linear mit dem Abstand von der z-Achse

E. partielle Ableitungen, Nabla-Operator, Gradient

betrachte im folgenden Funktionen, die von mehreren Variablen abhängen

$\longrightarrow$ $f(x,y,z)$ $\rightarrow$ skalare Felder $\varphi(\vec{r}) = \varphi(x,y,z)$

$\longrightarrow$ allg. $f(x_1, x_2, \dots, x_N)$ mit $N \in \mathbb{N}$

Definition: partielle Ableitung der Funktion nach der Variablen x_i

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{1}{\Delta x_i} \left[f(x_1, x_2, \dots, x_i + \Delta x_i, \dots, x_N) - f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_N) \right]}$$

Beispiele:

- $f(x,y) = xy^2 \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = y^2$

  $\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy$

- $\varphi(\vec{r}) = \vec{a} \cdot \vec{r}$ mit $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}, \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$\longrightarrow \varphi(\vec{r}) = a_x x + a_y y + a_z z = \varphi(x,y,z)$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = a_x, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = a_y, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = a_z$$

höhere Ableitungen

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, etc. aber auch: $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$

$\rightarrow$ gemischte Ableitungen!

z.B.: $f(x,y) = xy^2$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(y^2) = 2y$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(2xy) = 2y$

offensichtlich gilt hier: $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

allgemein: $\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}}$ sofern die partiellen Ableitungen stetig sind

$\hookrightarrow$ für $f(x_1, x_2, \dots, x_N)$

Beweis (für eine Funktion $f(x,y)$)

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x,y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$ ergibt eine Funktion von x (und y)

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\left[\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x+\Delta x, y)}{\Delta y} - \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x,y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y} \right]$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{\Delta x \Delta y}\left[f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x+\Delta x, y) - f(x, y+\Delta y) + f(x,y) \right]$$

$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} = \ldots$ ergibt denselben Ausdruck

Definition: Nabla-Operator:

$$\boxed{\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}.}$$

zu beachten: $\vec{\nabla}$ ist kein Vektor $\in \mathbb{R}^3$, sondern Vektor-Differentialoperator, d.h. die Komponenten sind keine Zahlen, sondern Differentiationsbefehle

Gradient $\rightarrow$ Anwendung von $\vec{\nabla}$ auf ein skalares Feld $\varphi(\vec{r})$

$$\boxed{\operatorname{grad} \varphi(\vec{r}) = \vec{\nabla}\varphi(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \varphi(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{pmatrix}}$$

$\rightarrow$ $\vec{\nabla}\varphi(\vec{r})$ ist ein Vektorfeld, sog. Gradientenfeld

Beispiele:

- $\varphi(\vec{r}) = \vec{a}\cdot\vec{r} \quad \rightarrow \quad \vec{\nabla}\varphi(\vec{r}) = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \vec{a}$

- $\varphi(\vec{r}) = xyz$

$$\rightarrow \quad \vec{\nabla}\varphi(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix}$$

- $\varphi(\vec{r}) = |\vec{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = (x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x}{|\vec{r}|} = \frac{x}{r}$$

analog: $\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{y}{r}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{z}{r}$

$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla}\varphi(\vec{r}) = \begin{pmatrix} x/r \\ y/r \\ z/r \end{pmatrix} = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{\vec{r}}{r} = \vec{e}_{\vec{r}}$$

- $\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{|\vec{r}|} = (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}$

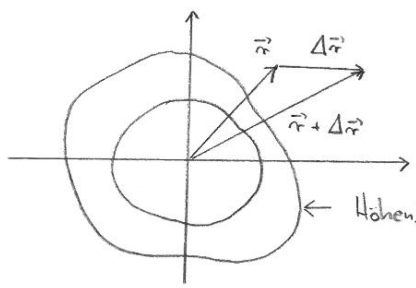
$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2x = \frac{-x}{|\vec{r}|^3} = -\frac{x}{r^3}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla}\varphi(\vec{r}) = -\frac{\vec{r}}{r^3} = -\frac{1}{r^2}\vec{e}_r$$

jetzt: Zusammenhang zwischen den Höhenlinien von $\varphi(\vec{r})$ und der Richtung von $\vec{\nabla}\varphi(\vec{r})$

betrachte zunächst $\Delta\varphi = \varphi(\vec{r}+\Delta\vec{r}) - \varphi(\vec{r})$

mit $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\Delta\vec{r} = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix}$



$$\Delta\varphi = \varphi(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - \varphi(x,y,z)$$

$$= \underbrace{\varphi(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - \varphi(x, y+\Delta y, z+\Delta z)}_{= \Delta x \frac{\partial\varphi}{\partial x} \text{ im Limes } \Delta x \to 0} +$$

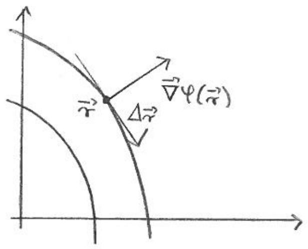
$$+ \underbrace{\varphi(x, y+\Delta y, z+\Delta z) - \varphi(x,y,z+\Delta z)}_{= \Delta y \frac{\partial\varphi}{\partial y} \text{ im Limes } \Delta y \to 0} +$$

$$+ \underbrace{\varphi(x,y,z+\Delta z) - \varphi(x,y,z)}_{= \Delta z \frac{\partial\varphi}{\partial z} \text{ im Limes } \Delta z \to 0}$$

im Limes $\Delta\vec{r} \to 0$ gilt also:

$$\Delta\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\Delta z \qquad \boxed{\Delta\varphi = \vec{\nabla}\varphi(\vec{r}) \cdot \Delta\vec{r}}$$

offensichtlich gilt: $\Delta\varphi = 0$, falls $\vec{\nabla}\varphi(\vec{r}) \perp \Delta\vec{r}$



d.h.: $\vec{\nabla}\varphi(\vec{r})$ steht senkrecht auf den Höhenlinien (in $d=2$)

in $d=3$: $\vec{\nabla}\varphi(\vec{r})$ steht senkrecht auf den Flächen mit $\varphi(\vec{r}) = \text{const.}$

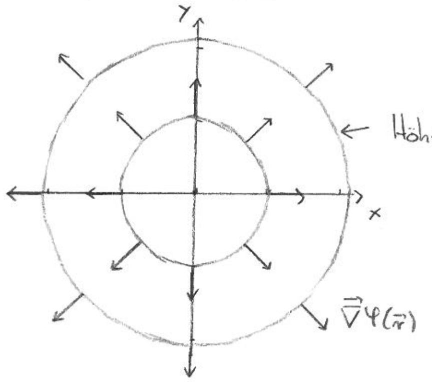
<u>außerdem</u>: aus $\Delta\varphi = |\vec{\nabla}\varphi(\vec{r})| \cdot |\Delta\vec{r}| \cdot \cos(\alpha)$ folgt

$\to$ $\Delta\varphi$ ist maximal für $\cos(\alpha) = 1 \;\hat{=}\; \alpha = 0 \;\hat{=}\; \vec{\nabla}\varphi(\vec{r}) \parallel \Delta\vec{r}$

d.h.: $\vec{\nabla}\varphi$ zeigt in Richtung der größten Steigung von $\varphi(\vec{r})$

z.B.: $\varphi(\vec{r}) = |\vec{r}|$

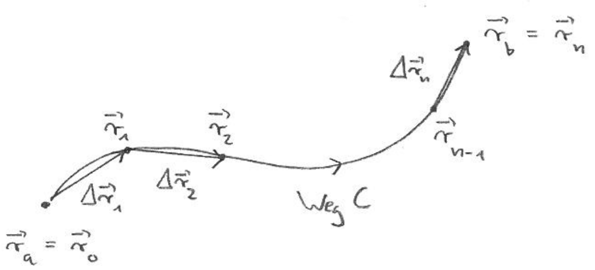
$\Rightarrow \quad \vec{\nabla}\varphi(\vec{r}) = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$



F. Wegintegrale

<u>gegeben</u>:
- ein Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r})$
- ein Weg C von $\vec{r}_a$ bis $\vec{r}_b$ $\hat{=}$ der Bahn $\vec{r}(t)$ mit $\vec{r}_a = \vec{r}(t_a)$ und $\vec{r}_b = \vec{r}(t_b)$

betrachte eine Zerlegung Z des Wegs C:



$\Delta\vec{r}_i = \vec{r}_i - \vec{r}_{i-1} \qquad i = 1,2,\dots,n$

$\vec{r}_i = \vec{r}(t_i)$

$t_0 = t_a \;, \quad t_n = t_b$

... und die folgende Riemann-Summe:

$$\boxed{S(Z) = \sum_{i=1}^{n} \vec{A}(\vec{r}_i) \cdot \Delta\vec{r}_i}$$

Definition: das Wegintegral über das Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r})$ entlang des Wegs C von $\vec{r}_a$ bis $\vec{r}_b$

$$\boxed{\int_{\vec{r}_a, C}^{\vec{r}_b} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \lim_{Z\to\infty} S(Z) = \lim_{Z\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \vec{A}(\vec{r}_i) \cdot \Delta\vec{r}_i}$$

$\lim_{Z\to\infty}$: immer feinere Zerlegungen

für die einzelnen Terme der Riemann-Summe gilt:

$$\vec{A}(\vec{r}_i) \cdot \Delta\vec{r}_i = \vec{A}(\vec{r}(t_i)) \cdot \underbrace{\left(\frac{\Delta\vec{r}_i}{\Delta t_i}\right)} \Delta t_i = \ldots \qquad \text{mit } \Delta t_i = t_i - t_{i-1}$$

$$= \frac{1}{\Delta t_i}(\vec{r}_i - \vec{r}_{i-1}) = \frac{1}{\Delta t_i}(\vec{r}(t_i) - \vec{r}(t_{i-1}))$$

$$= \frac{\vec{r}(t_{i-1} + \Delta t_i) - \vec{r}(t_{i-1})}{\Delta t_i}$$

$$= \dot{\vec{r}}(t_{i-1}) = \dot{\vec{r}}(t_i)$$

im Limes $\Delta t_i \to 0$

$$\ldots = \underbrace{\vec{A}(\vec{r}(t_i)) \cdot \dot{\vec{r}}(t_i)} \Delta t_i$$

$$= f(t_i) \qquad \text{mit} \qquad f(t) = \vec{A}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t)$$

$$\Longrightarrow \lim_{Z\to\infty} S(Z) = \lim_{Z\to\infty} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\,\Delta t_i}_{} \stackrel{!}{=} \int_{t_a}^{t_b} f(t)\,dt$$

$\hat{=}$ Riemann-Summe des üblichen (eindimensionalen) Integrals

das bedeutet: das Wegintegral lässt sich auf ein eindimensionales Integral zurückführen:

$$\boxed{\int_{\vec{r}_a, C}^{\vec{r}_b} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{t_a}^{t_b} \vec{A}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t)\, dt}$$

wobei der Weg C gegeben ist durch die Bahn $\vec{r}(t)$

<u>Beispiel:</u> gegeben ist das Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} x+y+z \\ xy \\ z^2+x \end{pmatrix}$

gesucht ist das Wegintegral $\int\limits_{\vec{r}_a, C}^{\vec{r}_b} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$ mit $\vec{r}_a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{r}_b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Weg C: Gerade von $\vec{r}_a$ nach $\vec{r}_b$

1. geeignete Parametrisierung des Wegs C

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix} \quad \text{mit } t_a = 0, \ t_b = 1 \quad \longrightarrow \vec{r}(t_a) = \vec{r}_a, \ \vec{r}(t_b) = \vec{r}_b$$

2. $\vec{A}(\vec{r}(t)) = \ldots$

setze $x = t, y = t, z = t$ in $\vec{A}(\vec{r})$ ein $\quad \ldots = \begin{pmatrix} 3t \\ t^2 \\ t^2+t \end{pmatrix}$

3. $\dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

4. $\vec{A}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t) = 3t + t^2 + t^2 + t = 4t + 2t^2$

5. $\int\limits_0^1 \vec{A}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t)\, dt = \int\limits_0^1 (4t + 2t^2)\, dt = \left[2t^2 + \frac{2}{3} t^3 \right]_0^1 = 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$

$$\Rightarrow \int\limits_{\vec{r}_a, C}^{\vec{r}_b} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \frac{8}{3}$$

<u>im Folgenden:</u> betrachte Vektorfelder $\vec{A}(\vec{r})$, die sich als Gradientenfelde darstellen lassen, d.h. $\vec{A}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \varphi(\vec{r})$

$$\longrightarrow \int\limits_{\vec{r}_a, C}^{\vec{r}_b} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int\limits_{\vec{r}_a, C}^{\vec{r}_b} (\vec{\nabla} \varphi(\vec{r})) \cdot d\vec{r} = \lim_{z \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(\vec{\nabla} \varphi(\vec{r}_i)) \cdot \Delta \vec{r}_i}_{\overset{!}{=} \varphi(\vec{r}_i) - \varphi(\vec{r}_{i-1})}$$

für $\Delta \vec{r}_i \to \vec{0}$

denn: $\varphi(\vec{r}_i) - \varphi(\vec{r}_{i-1}) = \varphi(\vec{r}_{i-1} + \Delta \vec{r}_i) - \varphi(\vec{r}_{i-1}) = \underbrace{\vec{\nabla} \varphi(\vec{r}_{i-1})}_{= \vec{\nabla} \varphi(\vec{r}_i)} \cdot \Delta \vec{r}_i$

für $\Delta \vec{r}_i \to \vec{0}$

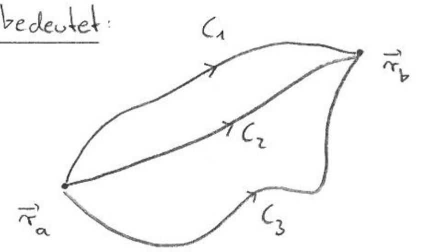
$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{\nabla}\varphi(\vec{r}_i) \right) \cdot \Delta\vec{r}_i \;\rightarrow\; \sum_{i=1}^{n} \left(\varphi(\vec{r}_i) - \varphi(\vec{r}_{i-1}) \right) =$$

$$= \varphi(\vec{r}_1) - \underbrace{\varphi(\vec{r}_0)}_{=\vec{r}_a} + \varphi(\vec{r}_2) - \varphi(\vec{r}_1) + \dots + \underbrace{\varphi(\vec{r}_n)}_{=\vec{r}_b} - \varphi(\vec{r}_{n-1}) =$$

$$= \varphi(\vec{r}_b) - \varphi(\vec{r}_a)$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_{\vec{r}_a, C}^{\vec{r}_b} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \varphi(\vec{r}_b) - \varphi(\vec{r}_a)}$$

das bedeutet:



das Weg integral ist unabhängig vom Verlauf des Wegs C!

in Analogie zum eindimensionalen Fall $\rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

hier: das skalare Feld $\varphi(\vec{r})$ ist Stammfunktion zum Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r})$ — Stammfunktion zu $f(x)$

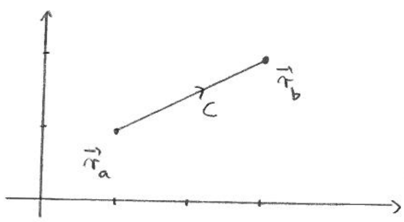
$\longrightarrow$ Berechnung der Stammfunktion durch Integration:

setze $\vec{r}_a = \vec{r}_0$, $\vec{r}_b = \vec{r}$

$$\boxed{\varphi(\vec{r}) = \varphi(\vec{r}_0) + \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{A}(\vec{r}\,') \cdot d\vec{r}\,'}$$

Beispiel: $\vec{A}(\vec{r}) = \dfrac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$

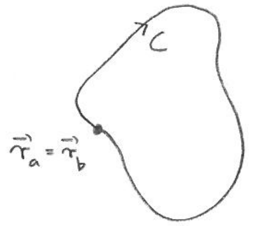
$\vec{r}_a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$



es gilt: $\vec{\nabla}(|\vec{r}|) = \dfrac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \quad \Rightarrow \quad \varphi(\vec{r}) = |\vec{r}|$ ist Stammfunktion zu $\vec{A}(\vec{r})$

$$\longrightarrow \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = |\vec{r}_b| - |\vec{r}_a| = \sqrt{13} - \sqrt{2}$$

Speziell: Wegintegral über einen geschlossenen Weg C



schreibe $\oint_C \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$

Falls $\vec{A}(\vec{r}) = \vec{\nabla}\varphi(\vec{r})$:

$$\oint_C \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \varphi(\underbrace{\vec{r}_b}_{=\vec{r}_a}) - \varphi(\vec{r}_a) = 0$$

6. Differentialgleichungen

Was ist eine Differentialgleichung (Dgl)?

$\longrightarrow$ Gleichung, die eine Funktion (z.B. $f(x)$) und ihre Ableitungen (z.B $f'(x), f''(x)$) enthält.

Beispiel: $\boxed{f(x) = f'(x)}$

die Aufgabe: Bestimmung aller Funktionen, die die Dgl erfüllen, ev. unter Berücksichtigung von Randbedingungen / Anfangsbedingungen

in diesem Beispiel: $f(x) = a e^x$ ist eine Lösung der Dgl $f(x) = f'(x)$ für beliebige $a \in \mathbb{R}$, da $f'(x) = a e^x = f(x)$

Klassifizierung von Differentialgleichungen

a) gewöhnlich/partiell

$f(x) = f'(x)$: gewöhnliche Dgl $\longrightarrow$ enthält keine partiellen Ableitungen

$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi(x,t)$: partielle Dgl

b) homogen/inhomogen

$f(x) + f''(x) = 0$: homogene Dgl $\longrightarrow$ jeder Term enthält die Funktion oder Ableitungen der Funktion

$f(x) + f''(x) = a$, mit $a \in \mathbb{R}$: inhomogene Dgl

c, Ordnung der Dgl

$a\,x(t) + b\,\ddot{x}(t) = 0$: Dgl $\underbrace{\text{zweiter}}_{\text{die höchste vorkommende Ableitung}}$ Ordnung

d, linear / nicht-linear

$f(x) - 2f'(x) + 4f''(x) = 0$: lineare Dgl → die Funktion und ihre Ableitungen treten nur linear auf

$(f(x))^2 - 2f'(x) + 4f''(x) = 0$: nicht-lineare Dgl → enthält Terme der Form $(f(x))^2$, $(f'(x))^2$, $f(x)\cdot f'(x)$ ...

e, Konstante / nicht-konstante Koeffizienten

$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{nicht-konstant}}}{x}\, f(x) + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{konstant}}}{3}\, f'(x) = 0$: Dgl mit nicht-konstanten Koeffizienten

$2f(x) + 3f'(x) = 0$: Dgl mit konstanten Koeffizienten

Beispiele aus der Physik

→ Quantenmechanik : Schrödingergleichung

$$\boxed{i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x,t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2} k x^2 \right] \Psi(x,t)}$$

hier: zeitabhängige Schrödingergleichung für ein Teilchen (Masse m) im eindimensionalen harmonischen Potential $V(x) = \frac{1}{2} k x^2$

Lösung der Schrödingergleichung → Wellenfunktion $\Psi(x,t)$

Klassifizierung : partiell, homogen, 2. Ordnung, linear, nicht-konstante Koeffizienten

→ Elektrostatik

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x} E_x(\vec{r}) + \frac{\partial}{\partial y} E_y(\vec{r}) + \frac{\partial}{\partial z} E_z(\vec{r}) = 4\pi \rho(\vec{r})}$$

gegeben : $\rho(\vec{r})$ → Ladungsdichte gesucht: $\vec{E}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} E_x(\vec{r}) \\ E_y(\vec{r}) \\ E_z(\vec{r}) \end{pmatrix}$ elektrisches Feld

Klassifizierung: partiell, inhomogen, 1. Ordnung, linear, konstante Koeffizienten

<u>im folgenden</u>:

systematische Lösung von gewöhnlichen Dgl. des folgenden Typs

<u>1.</u> 1. Ordnung, nicht-konstante Koeffizienten

$$\boxed{y'(x) + p(x)\,y(x) = 0}$$

$p(x)$ ist gegeben, z.B. $p(x) = x$

$y(x)$ ist gesucht

<u>2.</u> beliebige Ordnung, konstante Koeffizienten

$$\boxed{a_0 y(x) + a_1 y'(x) + a_2 y''(x) + \ldots + a_N y^{(N)}(x) = 0} \qquad a_i \in \mathbb{R}$$

$y^{(N)}(x)$: die Nte Ableitung von $y(x)$

<u>1. gewöhnliche Dgl 1. Ordnung mit nicht-konstanten Koeffizienten</u>

betrachte zunächst eine Dgl. der Form:

$$\boxed{y'(x) + p(x)\,y(x) = 0} \quad (*)$$

mit einer beliebigen (gegebenen) Funktion $p(x)$

Lösungsstrategie $\longrightarrow$ <u>Separation der Variablen</u> (auch: Trennung der Variablen)

<u>schreibe</u>: $y'(x) = \dfrac{dy}{dx}$

$$\longrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -p(x)\,y \quad \Big| \cdot dx$$

$$dy = -y\,p(x)\,dx \quad \Big| \cdot \frac{1}{y}$$

$$\boxed{\frac{dy}{y} = -p(x)\,dx}$$

$\longrightarrow$ die Variablen x und y sind separiert

Integration auf beiden Seiten: $\displaystyle\int_{y_1}^{y_2} \frac{1}{y}\,dy = -\int_{x_1}^{x_2} p(x)\,dx$ mit $y_1 = y(x_1)$

$y_2 = y(x_2)$

linke Seite: $\int_{y_1}^{y_2} \frac{1}{y}\, dy = \left[\ln(y) \right]_{y_1}^{y_2} = \ln(y_2) - \ln(y_1) = \ln\left(\frac{y_2}{y_1}\right)$

rechte Seite: sei $P(x)$ Stammfunktion zu $p(x)$

$$\Rightarrow \quad -\int_{x_1}^{x_2} p(x)\, dx = -\left[P(x) \right]_{x_1}^{x_2} = P(x_1) - P(x_2)$$

$$\Rightarrow \quad \ln\left(\frac{y_2}{y_1}\right) = P(x_1) - P(x_2) \quad \Big|\, e^{\cdots}$$

$$\underbrace{e^{\ln(y_2/y_1)}}_{= \frac{y_2}{y_1}} = \underbrace{e^{(P(x_1) - P(x_2))}}_{= e^{P(x_1)} e^{-P(x_2)}} \quad \longrightarrow \quad y(x_2) = y(x_1)\, e^{P(x_1)} e^{-P(x_2)}$$

setze $x_2 = x \longrightarrow$ die Variable x

und $A = y(x_1)\, e^{P(x_1)}$

$$\boxed{y(x) = A e^{-P(x)}}$$

ist eine Lösung der Dgl (*)

<u>Beispiel</u>:

$$\boxed{y'(x) + 2x\, y(x) = 0}$$

d.h. $p(x) = 2x \longrightarrow P(x) = x^2$ ist die Stammfunktion zu $p(x)$

$\Rightarrow$ die Lösung der Dgl lautet $\boxed{y(x) = A e^{-x^2}}$

<u>Verallgemeinerung</u>: die Separation der Variablen lässt sich anwenden auf Dgl der Form

$$\boxed{y'(x) + \frac{p(x)}{q(y)} = 0}$$

$\longrightarrow \quad y'(x) = \frac{dy}{dx} \quad \Rightarrow \quad q(y)\, dy + p(x)\, dx = 0$

$\longrightarrow \quad P(x)$ Stammfunktion zu $p(x)$

$Q(y)$ Stammfunktion zu $q(y)$

ergibt:

$\boxed{Q(y) = -P(x) + c}$ auflösen nach $y(x) \longrightarrow$ Lösung der Dgl

2. gewöhnliche Dgl mit konstanten Koeffizienten

im folgenden: allgemeines Lösungsschema für Dgl der Form

$$\boxed{a_0 y(x) + a_1 y'(x) + a_2 y''(x) + \dots + a_N y^{(N)}(x) = 0} \quad (*) \qquad a_i \in \mathbb{R}$$

$\rightarrow$ gewöhnlich, homogen, beliebige Ordnung, linear, konstante Koeffizienten

Ansatz: d.h. Annahme einer speziellen Form der Lösung

$$\boxed{y(x) = A e^{\alpha x}} \qquad A \in \mathbb{R}$$

Bestimmung der Ableitungen:

$$y'(x) = A \alpha e^{\alpha x} = \alpha y(x)$$
$$y''(x) = A \alpha^2 e^{\alpha x} = \alpha^2 y(x)$$
$$\vdots$$
$$y^{(n)}(x) = \alpha^n y(x)$$

Einsetzen von $y(x), y'(x), y''(x), \dots$ in die Dgl $(*)$ ergibt:

$$a_0 y(x) + a_1 \alpha y(x) + a_2 \alpha^2 y(x) + \dots + a_N \alpha^N y(x) = 0$$

$$(a_0 + a_1 \alpha + a_2 \alpha^2 + \dots + a_N \alpha^N) y(x) = 0$$

entweder: $y(x) = 0$ für jedes x $\rightarrow$ sog. 'triviale Lösung'
existiert immer (für homogene Dgl)

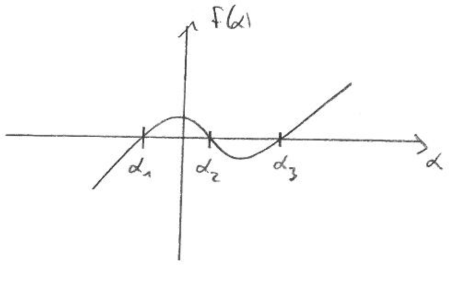
oder:

$$\underbrace{\boxed{a_0 + a_1 \alpha + a_2 \alpha^2 + \dots + a_N \alpha^N = 0}}_{= \sum_{n=0}^{N} a_n \alpha^n} \qquad \text{algebraische Gleichung für } \alpha$$

das bedeutet: mit Hilfe des Ansatzes $y(x) = A e^{\alpha x}$ wird die Dgl $(*)$ auf eine algebraische Gleichung reduziert

betrachte die Funktion $f(\alpha) = \sum_{n=0}^{N} a_n \alpha^n$

$\rightarrow$ gesucht sind die Nullstellen α_i der Funktion $f(\alpha)$



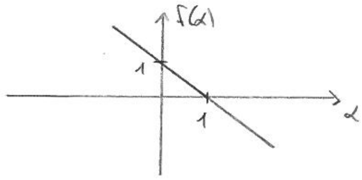
Beispiele:

1. $\boxed{y(x) - y'(x) = 0}$ $\longrightarrow$ $N = 1$, d.h. Dgl 1. Ordnung

$a_0 = 1$, $a_1 = -1$

$\Rightarrow$ $f(\alpha) = 1 - \alpha$

eine Nullstelle bei $\alpha_1 = 1$



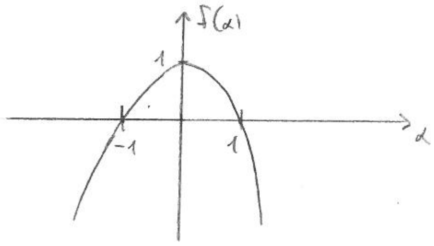
$\Rightarrow$ $y(x) = Ae^{\alpha_1 x} = Ae^{x}$ ist eine Lösung der Dgl

2. $\boxed{y(x) - y''(x) = 0}$ $\longrightarrow$ $N = 2$, d.h. Dgl 2. Ordnung

$a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = -1$

$\Rightarrow$ $f(\alpha) = 1 - \alpha^2$

Nullstellen bei $\alpha_1 = 1$
$\alpha_2 = -1$



d.h. es gibt zwei Lösungen.

$$y_1(x) = A_1 e^{\alpha_1 x} = A_1 e^{x}$$
$$y_2(x) = A_2 e^{\alpha_2 x} = A_2 e^{-x}$$

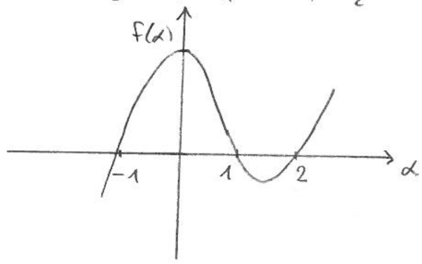
$\Rightarrow$ allgemeine Lösung: $\boxed{y(x) = A_1 e^{x} + A_2 e^{-x}}$ sog. Linearkombination

3. $\boxed{2y(x) - y'(x) - 2y''(x) + y'''(x) = 0}$ $\longrightarrow$ $N = 3$, d.h. Dgl 3. Ordnung

$a_0 = 2$, $a_1 = -1$, $a_2 = -2$, $a_3 = 1$

$\Rightarrow$ $f(\alpha) = 2 - \alpha - 2\alpha^2 + \alpha^3$

Nullstellen bei $\alpha_1 = -1$
$\alpha_2 = 1$
$\alpha_3 = 2$



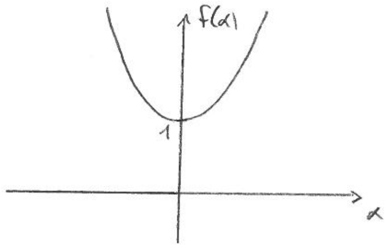
$\longrightarrow$ drei Lösungen: $y_1(x) = A_1 e^{-x}$ $\quad y_3(x) = A_3 e^{2x}$
$y_2(x) = A_2 e^{x}$

$\Rightarrow$ allgemeine Lösung: $\boxed{y(x) = A_1 e^{-x} + A_2 e^{x} + A_3 e^{2x}}$

4. $$\boxed{y(x) + y''(x) = 0} \quad (*)$$

$a_0 = 1, \; a_1 = 0, \; a_2 = 1$

$\Rightarrow \quad f(\alpha) = 1 + \alpha^2$



d.h. Keine Nullstellen $\overset{?}{\Rightarrow}$ keine Lösung?

aber: $y_1(x) = \cos(x)$, $y_2(x) = \sin(x)$ sind Lösungen der Dgl $(*)$!

Wie erhält man diese beiden Lösungen aus dem allgemeinen Lösungsschema?

$\longrightarrow \quad f(\alpha) = 0$ ergibt $\alpha^2 = -1$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} \alpha_1 &= i \\ \alpha_2 &= -i \end{aligned}}$$ mit $i^2 = -1$

siehe Kap. I: Komplexe Zahlen

die Lösungen lauten also

$$y_1(x) = c_1 e^{ix}$$
$$y_2(x) = c_2 e^{-ix} \qquad \text{mit } c_{1/2} \in \mathbb{C}$$

allgemeine Lösung: $$\boxed{y(x) = c_1 e^{ix} + c_2 e^{-ix}}$$

es gilt (siehe Kap. I):

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$$
$$e^{-ix} = \cos(x) - i\sin(x)$$

$$\Rightarrow \quad y(x) = c_1 \left(\cos(x) + i\sin(x)\right) + c_2 \left(\cos(x) - i\sin(x)\right)$$
$$= \underbrace{(c_1 + c_2)}_{=a} \cos(x) + \underbrace{i\,(c_1 - c_2)}_{=b} \sin(x)$$

d.h.: $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$ ergibt $a = 1, \; b = 0$

$\longrightarrow \; y(x) = \cos(x)$

$c_1 = -\frac{i}{2}, \; c_2 = \frac{i}{2}$ ergibt $a = 0, \; b = i \cdot (-i) = 1$

$\longrightarrow \; y(x) = \sin(x)$

das bedeutet: das allgemeine Lösungsschema ist anwendbar, sofern alle Nullstellen von $f(\alpha)$ mit $\alpha \in \mathbb{C}$ berücksichtigt werden!

H Taylorentwicklung

auch: Potenzreihenentwicklung

gegeben sei eine Funktion $f(x)$ mit den Ableitungen $f'(x), f''(x), \dots$

bei $x = 0$: $\underbrace{f(0), f'(0), f''(0), \dots}$

damit lassen sich die folgenden Funktionen konstruieren:

$$\boxed{\begin{aligned} f_0(x) &= f(0) \\ f_1(x) &= f(0) + x f'(0) \\ f_2(x) &= f(0) + x f'(0) + \frac{1}{2} x^2 f''(0) \\ &\vdots \\ f_m(x) &= \sum_{n=0}^{m} \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) \end{aligned}}$$

$$= \underbrace{\frac{x^0}{0!}}_{=1} \underbrace{f^{(0)}(0)}_{=f(0)} + \frac{x^1}{1!} f^{(1)}(0) + \frac{x^2}{2!} f^{(2)}(0) + \dots$$

<u>es gilt</u>: der Funktionswert bei $x = 0$ und die ersten m Ableitungen bei $x = 0$ von $f(x)$ und $f_m(x)$ stimmen überein:

$$f_m(0) = f(0) \,, \quad f_m^{(n)}(0) = f^{(n)}(0) \quad \text{für } n = 1, 2, \dots m$$

z.B.: $f_2(0) = f(0)$

$$f_2'(x) = f'(0) + x f''(0) \quad \longrightarrow \quad f_2'(0) = f'(0)$$

$$f_2''(x) = f''(0) \quad \longrightarrow \quad f_2''(0) = f''(0)$$

allgemein:

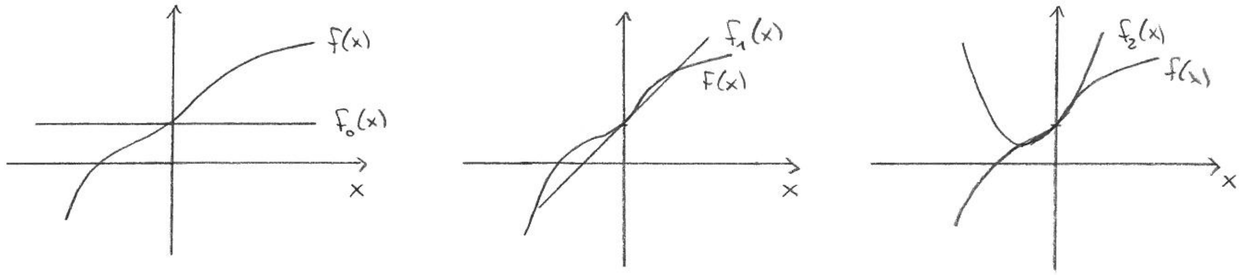
$$f_m'(x) = \sum_{n=1}^{m} \frac{n}{n!} x^{n-1} f^{(n)}(0) \quad \longrightarrow \quad f_m'(0) = f'(0)$$

$$f_m''(x) = \sum_{n=2}^{m} \frac{n(n-1)}{n!} x^{n-2} f^{(n)}(0) \quad \longrightarrow \quad f_m''(0) = f''(0)$$

$$\vdots$$

$$f_m^{(m)}(x) = \underbrace{\frac{m!}{m!}}_{=1} f^{(m)}(0) \quad \longrightarrow \quad f_m^{(m)}(0) = f^{(m)}(0)$$

Bedeutung der $f_m(x)$: Näherung der Funktion nahe $x = 0$



$\rightarrow$ je größer m, desto besser die Näherung!

<u>Definition:</u> Taylorreihe der Funktion f(x)

$$\boxed{f_T(x) = \lim_{m\to\infty} f_m(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0)}$$

$f_m(x)$: Taylorentwicklung von f(x) bis m-ter Ordnung

in vielen Fällen gilt: $\boxed{f_T(x) = f(x)}$ z.B. : $f(x) = e^x, \sin(x), \cos(x)$

<u>Beispiele:</u>

<u>1. $f(x) = 2 + 5x - 6x^2$</u>

$f(0) = 2$, $f'(x) = 5 - 12x$, $f'(0) = 5$

$f''(x) = -12$, $f''(0) = -12$

alle höheren Ableitungen = 0

$$\Rightarrow \quad f_T(x) = f_2(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{1}{2} x^2 f''(0)$$

$$= 2 + 5x - 6x^2 \overset{!}{=} f(x)$$

<u>2. $f(x) = e^x$</u>

$f(0) = 1$, $f'(x) = e^x$, $f'(0) = 1$

$f''(x) = e^x$, $f''(0) = 1$

$\vdots$

$f^{(n)}(x) = e^x$, $f^{(n)}(0) = 1$

daraus folgt für die Taylorreihe der e-Funktion:

$$\boxed{f_T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x}$$

↳ (ohne Beweis) gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

Ableitung dieser Taylorreihe:

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \frac{d}{dx}\Big(\underbrace{1}_{\text{ergibt } 0} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\Big) = \frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \ldots$$

Substitution: $m = n-1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \longrightarrow \sum_{m=0}^{\infty}$

$$\ldots = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} \overset{!}{=} e^x \qquad \text{ok}$$

3. $f(x) = \sin(x)$

$f(0) = 0$, $f'(x) = \cos(x)$, $f'(0) = 1$

$f''(x) = -\sin(x)$, $f''(0) = 0$

$f^{(3)}(x) = -\cos(x)$, $f^{(3)}(0) = -1$

$f^{(4)}(x) = \underbrace{\sin(x)}_{\overset{!}{=} f(x)}$, $f^{(4)}(0) = 0$

$$\Rightarrow f_T(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \ldots = \sin(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

↳ ohne Beweis

es gilt also:

$$\boxed{\sin(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{(2m+1)!} x^{2m+1}}$$

4. $f(x) = (1+x)^{-1}$

$f(0) = 1$, $f'(x) = (-1)(1+x)^{-2}$, $f'(0) = -1$

$f''(x) = (-1)(-2)(1+x)^{-3}$, $f''(0) = 2$

$\vdots$

$f^{(n)}(x) = (-1)^n \, n! \, (1+x)^{-(n+1)}$, $f^{(n)}(0) = n!(-1)^n$

$$\Rightarrow \quad f_T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \, n! \, (-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

$$= 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots$$

zu beachten: $f_T(x) = (1+x)^{-1}$ nur für $|x| < 1$ (ohne Beweis)

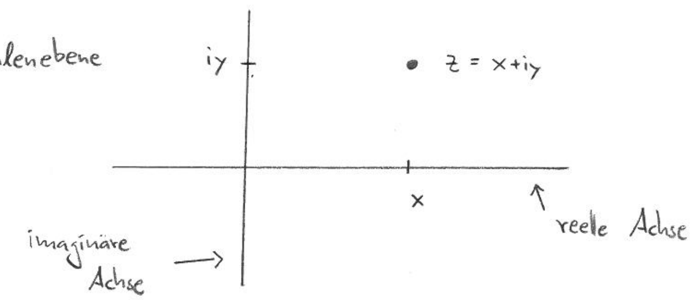
z.B.: $x = -2 \quad \longrightarrow \quad f(x) = (1-2)^{-1} = -1$

$$f_T(x) = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots \longrightarrow \infty$$

I. Komplexe Zahlen

Komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$: $\boxed{z = x + iy}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$

Darstellung in der Komplexen Zahlenebene



Realteil: $\mathrm{Re}(z) = x$

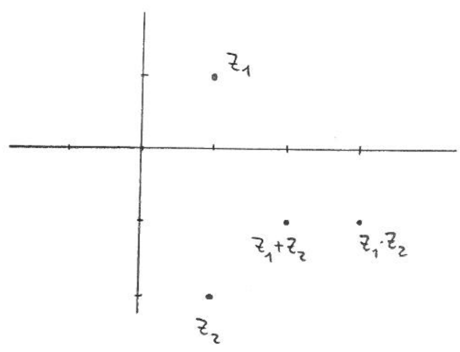
Imaginärteil: $\mathrm{Im}(z) = y$

Rechenregeln und Beispiele

$\longrightarrow$ Addition und Multiplikation

$z_1 = 1 + i$

$z_2 = 1 - 2i$



$$\Rightarrow \quad z_1 + z_2 = (1+i) + (1-2i)$$

$$= (1+1) + (i-2i) = 2 - i$$

$$z_1 \cdot z_2 = (1+i)(1-2i)$$

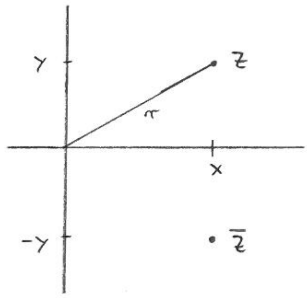
$$= 1 - 2i + i - \underbrace{2i^2}_{=-2}$$

$$= 3 - i$$

$\boxed{i^2 = -1}$

→ Komplexe Konjugation

sei $z = x + iy$, dann ist $\bar{z} = x - iy$ die zu z konjugiert komplexe Zahl (auch: z^*)



und es gilt: $z \cdot \bar{z} = (x+iy)(x-iy)$

$$= x^2 - i^2 y^2 = x^2 + y^2 = r^2 \in \mathbb{R}$$

→ Division

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} \qquad (\text{Erweiterung mit } \bar{z})$$

$$= \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \underbrace{\frac{x}{x^2+y^2}}_{= \mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right)} + i \underbrace{\frac{-y}{x^2+y^2}}_{= \mathrm{Im}\left(\frac{1}{z}\right)}$$

z.B.: $\dfrac{i}{-2+i} = \dfrac{i(-2-i)}{(-2+i)(-2-i)} = \dfrac{-2i - i^2}{4 - i^2} = \dfrac{1}{5}(1 - 2i)$

Komplexwertige Funktionen

$$f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$z \longmapsto f(z)$$

z.B.: $f(z) = i + z^2$

$\rightarrow f(0) = i, \quad f(1) = i + 1, \quad f(i) = i - 1, \ldots$

speziell: die komplexe e-Funktion

Definition als Potenzreihe:

$$\boxed{e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad z \in \mathbb{C}}$$

analog zur Taylorreihe für e^x mit $x \in \mathbb{R}$

setze jetzt $z = i\varphi$ mit $\varphi \in \mathbb{R}$

$$\rightarrow \quad e^{i\varphi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\varphi)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \varphi^n$$

für i^n gilt:

n	0	1	2	3	4	5	...
i^n	1	i	-1	$-i$	1	i	...

$$\Rightarrow \quad e^{i\varphi} = \frac{1}{0!}\varphi^0 + i\frac{1}{1!}\varphi^1 - \frac{1}{2!}\varphi^2 - i\frac{1}{3!}\varphi^3 + \dots =$$

Sortieren nach Real- und Imaginärteil:

$$= \underbrace{\frac{1}{0!}\varphi^0 - \frac{1}{2!}\varphi^2 + \dots}_{= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{(2m)!}\varphi^{2m}} \quad i\underbrace{\left(\frac{1}{1!}\varphi^1 - \frac{1}{3!}\varphi^3 + \dots\right)}_{= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{(2m+1)!}\varphi^{(2m+1)}}$$

$$= \cos(\varphi) \qquad\qquad = \sin(\varphi)$$

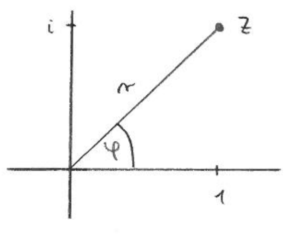
$$\Rightarrow \quad \boxed{e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)} \qquad \text{Eulersche Formel}$$

jetzt: betrachte die komplexe Zahl $z = r e^{i\varphi}$ mit $r \in \mathbb{R}, \varphi \in \mathbb{R}$

$$\longrightarrow \quad z = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)) = \underbrace{r\cos(\varphi)}_{=x} + i\underbrace{r\sin(\varphi)}_{=y} = x + iy$$

$\hat{=}$ der Umrechnung zwischen Kartesischen Koordinaten (x,y) und Polarkoordinaten (r,φ)

z.B.: $z = 1 + i = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$



$x = 1, \ y = 1$

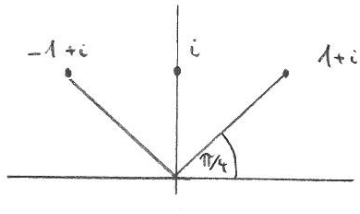
$r^2 = x^2 + y^2 = 2 \quad \rightarrow \quad r = \sqrt{2}$

$\varphi = \frac{\pi}{4}$

$\longrightarrow$ Multiplikation komplexer Zahlen in Polarkoordinaten

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= r_1 e^{i\varphi_1} \\ z_2 &= r_2 e^{i\varphi_2} \end{aligned}\right\} \quad z_1 z_2 = \underbrace{r_1 r_2}_{=r} \underbrace{e^{i\varphi_1} e^{i\varphi_2}}_{= e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}} = r e^{i\varphi} \qquad \text{mit } \varphi = \varphi_1 + \varphi_2$$

z.B.:



$$i(1+i) = e^{i\frac{\pi}{2}} \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$= \sqrt{2}\, e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

$$= -1 + i$$

→ Additionstheoreme für Sinus und Cosinus

z.B.: Zerlege die Identität $e^{i\alpha} e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)}$ in Real- und Imaginärteil

$$\rightarrow \quad \underbrace{(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))(\cos(\beta) + i\sin(\beta))} = \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)$$

$$= \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) + i\left(\cos(\alpha)\sin(\beta) + \sin(\alpha)\cos(\beta)\right)$$

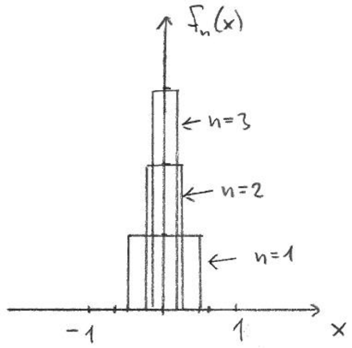
die Identität gilt für Real- und Imaginärteil unabhängig

$$\Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} \cos(\alpha+\beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) &= \cos(\alpha)\sin(\beta) + \sin(\alpha)\cos(\beta) \end{aligned}}$$

J. δ-Funktion

die δ-Funktion „$\delta(x)$" (hier zunächst eindimensional) lässt sich folgendermaßen definieren:

$$\boxed{\delta(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)}$$



$$\text{mit} \quad f_n(x) = \begin{cases} n & : \ |x| < \frac{1}{2n} \\ 0 & : \ \text{sonst} \end{cases}$$

es gilt:

$$\rightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\,dx = \int_{-1/2n}^{1/2n} n\,dx = n \cdot \frac{2}{2n} = 1$$

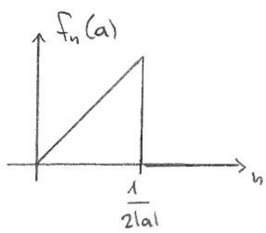
$$\Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\,dx}_{=1} = 1$$

$$\rightarrow \quad f_n(0) = n \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f_n(0) = \infty$$

→ für festes a mit $a \neq 0$:

$$f_n(a) = n \quad \text{für } |a| < \frac{1}{2n}$$

d.h. für $n < \frac{1}{2|a|}$



$$\Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f_n(a) = 0 \qquad \text{für } a \neq 0$$

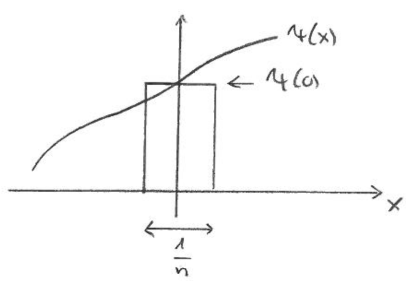
d.h.: in dieser Darstellung gilt für die δ-Funktion:

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty & : \ x = 0 \\ 0 & : \ x \neq 0 \end{cases}$$

die wichtigste Eigenschaft der δ-Funktion:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\,\delta(x)\,dx = \psi(0)} \qquad \text{für beliebige Funktionen } \psi(x)$$

denn: $$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\,\delta(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\,f_n(x)\,dx}_{} = \ldots$$



$$= n \int_{-\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2n}} \psi(x)\,dx \ \underset{\uparrow}{=} \ n\left(\frac{1}{n}\,\psi(0)\right) = \psi(0)$$

im Lime $n \to \infty$

$$\ldots = \psi(0)$$

<u>Beispiele:</u>

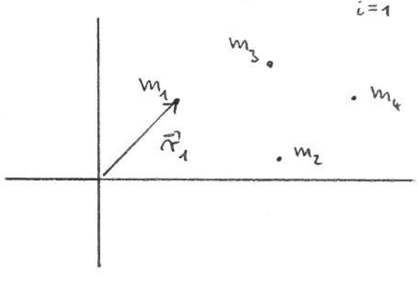
- $\int_{-\infty}^{\infty} e^x\,\delta(x)\,dx = e^0 = 1$
- $\int_{-1}^{3} e^x\,\delta(x)\,dx = e^0 = 1$ → 'δ-Peak' im Integrationsinterval enthalten
- $\int_{1}^{\infty} e^x\,\delta(x)\,dx = 0$ → 'δ-Peak' im Integrationsinterval <u>nicht</u> enthalten

<u>Wofür ist die δ-Funktion nützlich?</u>

→ Beschreibung von Punktmassen, Punktladungen

$\rho(\vec{r}) = m\,\delta(\vec{r})$: Massendichte einer Punktmasse (Masse = m) am Ort $\vec{r} = \vec{0}$

$\rho(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} m_i\,\delta(\vec{r} - \vec{r}_i)$: Massendichte von N Punktmassen (Massen = m_i) an den Orten $\vec{r}_i$



die dreidimensionale δ-Funktion

definiert als $\boxed{\delta(\vec{r}) = \delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z)}$ auch: $\delta^3(\vec{r})$

sei $f(\vec{r})$ ein beliebiges skalares Feld

→ analog zum eindimensionalen Fall gilt:

$$\boxed{\int d^3\vec{r}\; f(\vec{r})\,\delta(\vec{r}) = f(\vec{0})} \qquad \int d^3\vec{r} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dz$$

↳ Volumenintegral über den gesamten $\mathbb{R}^3$

→ siehe Kap. K

Beweis:

$$\int d^3\vec{r}\; f(\vec{r})\,\delta(\vec{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dz\; f(x,y,z)\,\delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z) =$$

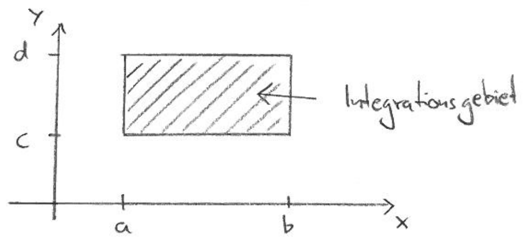
$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dx\,\delta(x) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dy\,\delta(y) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dz\; f(x,y,z)\,\delta(z)}_{=f(x,y,0)}}_{=f(x,0,0)}}_{=f(0,0,0)} = f(\vec{0}) \quad ✓$$

insbesondere gilt: $\boxed{\int d^3\vec{r}\;\delta(\vec{r}) = 1}$

K. Flächen- und Volumenintegrale

zunächst → Mehrfachintegrale

z.B.: $\displaystyle\int_a^b dx \int_c^d dy\; f(x,y)$



wie berechnet man solche Mehrfachintegrale?

a) falls $f(x,y) = g(x)\,h(y)$:

$$\int_a^b dx \int_c^d dy\; g(x)\,h(y) = \underbrace{\int_a^b dx\; g(x)}_{=G}\; \underbrace{\int_c^d dy\; h(y)}_{=H}$$

in diesem Fall gilt:

Mehrfachintegral = Produkt von eindimensionalen Integralen (G.H)

b) falls sich $f(x,y)$ <u>nicht</u> als Produkt $g(x)h(y)$ darstellen lässt

z.B.: $f(x,y) = x\, e^{xy}$

$$\rightarrow \int_0^1 dx \int_0^1 dy\, x\, e^{xy} = \int_0^1 dx\, x \underbrace{\int_0^1 dy\, e^{xy}}_{} = \ldots$$

$$= \left[\frac{1}{x} e^{xy}\right]_0^1 = \frac{1}{x}\left(e^x - 1\right)$$

$$\ldots = \int_0^1 dx\, \left(e^x - 1\right) = \left[e^x - x\right]_0^1 = e - 1 - 1 = e - 2$$

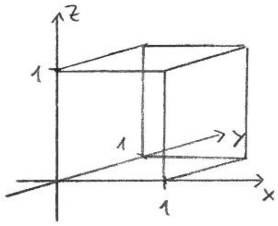
d.h.: zuerst $\int dy$, dann $\int dx$ ausführen (oder umgekehrt)

<u>Volumenintegrale</u>

Schreibweise: $\int_V \varphi(\vec{r})\, dV$ oder $\int_V \varphi(\vec{r})\, d^3r$ → Integration über ein Volumen V

↳ skalares Feld

z.B.:



$$\rightarrow \int_V d^3r = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 dz$$

d.h.: Volumenintegral = Dreifachintegral

Berechnung physikalischer Größen mit Volumenintegralen

→ Volumen $\boxed{V = \int_V dV}$

denn: $$\int_V dV = \lim_{Z \to \infty} \underbrace{\sum_i \Delta V_i}_{\text{Riemann-Summe}}$$

Z: Zerlegung des Volumens V in kleine Würfel ΔV_i

z.B.: $V = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 dz = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$

→ Masse in einem Volumen V bei gegebener Massendichte $\varrho(\vec{r})$

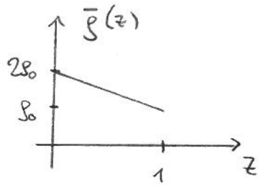
$$\boxed{M = \int_V d^3r \; \rho(\vec{r})}$$

→ für konstante Massendichte $\rho(\vec{r}) = \rho_0$:

$$M = \int_V d^3r \; \rho_0 = \rho_0 \underbrace{\int_V d^3r}_{=V} = \rho_0 V$$

→ Beispiel : $\rho(\vec{r}) = \bar{\rho}(z)$

mit $\bar{\rho}(z) = \rho_0 \cdot (2 - z)$

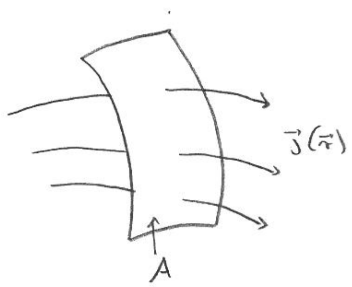


$$M = \underbrace{\int_0^1 dx}_{=1} \underbrace{\int_0^1 dy}_{=1} \int_0^1 dz \; \rho_0 (2-z) = \rho_0 \left[2z - \tfrac{1}{2} z^2 \right]_0^1 = \rho_0 \left(2 - \tfrac{1}{2} \right) = \tfrac{3}{2} \rho_0$$

Flächenintegrale

gegeben : Vektorfeld $\vec{j}(\vec{r})$

Fläche A

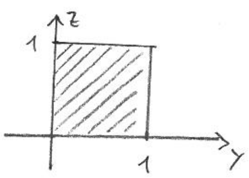


Definition : Flächenintegral (Fluss)

$$\boxed{\Phi = \int_A \vec{j}(\vec{r}) \cdot \vec{dA}}$$

Beispiele

1. sei $\vec{j}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} y+z \\ yz \\ xy \end{pmatrix}$ Fläche A :



$$\Rightarrow \quad \vec{dA} = \begin{pmatrix} dA \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dy\,dz \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

($\vec{dA}$ steht $\perp$ auf dem Flächenelement)

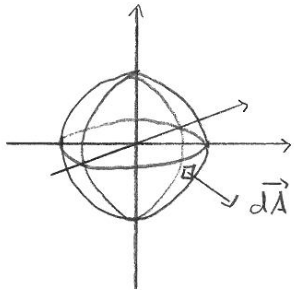
$$\rightarrow \quad \vec{j}(\vec{r}) \cdot \vec{dA} = (y+z)\, dy\, dz$$

$$\Phi = \int_0^1 dy \int_0^1 dz \; (y+z) = \int_0^1 dy \underbrace{\left[yz + \tfrac{1}{2} z^2 \right]_0^1}_{= y + \frac{1}{2}} = \left[\tfrac{1}{2} y^2 + \tfrac{1}{2} y \right]_0^1 =$$

$$= 1$$

2. $\vec{j}(\vec{r}) = \vec{r}$

A: Oberfläche einer Kugel mit Radius R



$d\vec{A}$ steht $\perp$ auf der Kugeloberfläche

$\rightarrow \quad d\vec{A} = dA\, \vec{e}_r \quad$ mit $\quad \vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$

auf der Kugeloberfläche ist $r = R$

$$\Rightarrow \quad \Phi = \int_A \underbrace{\vec{r} \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}}_{= r \ (= |\vec{r}|)} dA = R \underbrace{\int_A dA}_{= \text{Oberfläche der Kugel} = 4\pi R^2} = 4\pi R^3$$

L. Divergenz und Rotation

Definition: Divergenz eines Vektorfelds $\vec{A}(\vec{r})$

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_x(\vec{r}) \\ A_y(\vec{r}) \\ A_z(\vec{r}) \end{pmatrix} = \frac{\partial A_x(\vec{r})}{\partial x} + \frac{\partial A_y(\vec{r})}{\partial y} + \frac{\partial A_z(\vec{r})}{\partial z}}$$

auch: $\operatorname{div} \vec{A}(\vec{r})$

Beispiele:

- $\vec{A}(\vec{r}) = \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}) = \underbrace{\frac{\partial x}{\partial x}}_{=1} + \underbrace{\frac{\partial y}{\partial y}}_{=1} + \underbrace{\frac{\partial z}{\partial z}}_{=1} = 3$

- $\vec{A}(\vec{r}) = \underbrace{\vec{b} \times \vec{r}}$ mit dem konstanten Vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} b_y z - b_z y \\ b_z x - b_x z \\ b_x y - b_y x \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x}(b_y z - b_z y) = 0 \quad \text{etc}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}) = 0$$

Definition Rotation eines Vektorfelds $\vec{A}(\vec{r})$

$$\boxed{\vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A_x(\vec{r}) \\ A_y(\vec{r}) \\ A_z(\vec{r}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z(\vec{r})}{\partial y} - \frac{\partial A_y(\vec{r})}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x(\vec{r})}{\partial z} - \frac{\partial A_z(\vec{r})}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y(\vec{r})}{\partial x} - \frac{\partial A_x(\vec{r})}{\partial y} \end{pmatrix}}$$

auch: $\operatorname{rot}\vec{A}(\vec{r})$

Beispiele:

- $\vec{A}(\vec{r}) = \vec{r} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z} = 0$ etc $\quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{r}) = \vec{0}$
- $\vec{A}(\vec{r}) = \vec{b}\times\vec{r} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial y}(b_x y - b_y x) - \frac{\partial}{\partial z}(b_z x - b_x z) = 2b_x$

$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{r}) = 2\vec{b}$$

allgemein gilt:

Gradientenfelder sind wirbelfrei : $\boxed{\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\varphi(\vec{r})) = \vec{0}}$

für beliebige skalare Felder $\varphi(\vec{r})$

denn:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial y} \\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial x} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial z} \\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x} \end{pmatrix} = \vec{0}$$

Wirbelfelder sind quellenfrei : $\boxed{\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{r})) = 0}$

denn:

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{r})) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) =$$

$$= \underbrace{\frac{\partial^2 A_x}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z\partial y}}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial^2 A_y}{\partial z\partial x} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial x\partial z}}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial^2 A_z}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial y\partial x}}_{=0} = 0$$