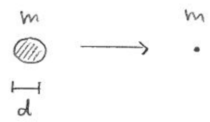
Vorlesung: Mathematische Methoden für das Lehramt (Ba of Arts)

1. Kinematik von Massenpunkten

Beschreibung der Bewegung von $\underbrace{\text{punktförmigen Körpern}}$ relativ zu einem Bezugssystem

d.h.: 

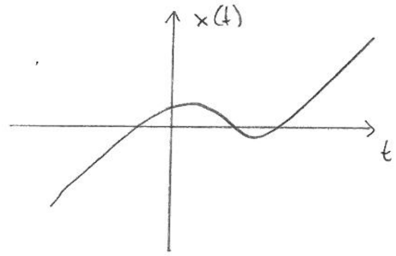
$\lim d \to 0$!

speziell: eindimensionale Bewegung (Bewegung entlang eine Linie)

Massenpunkt (Masse m) am Ort x zur Zeit t

$x(t)$ sei vorgegeben

↳ der Ort des Massenpunkts als Funktion der Zeit

z.B.: 

physikalische Größen: Masse m

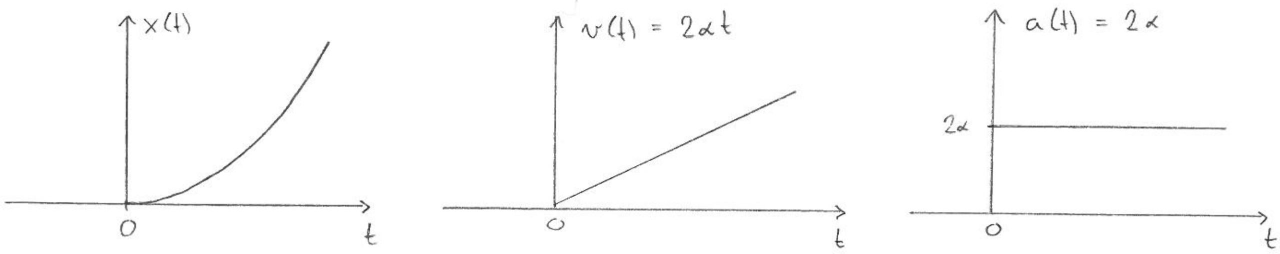
Ort x

Zeit t

damit lassen sich weitere phys. Größen konstruieren:

- Geschwindigkeit v : $v(t) = \frac{d}{dt}\, x(t) \quad \left(= \frac{dx}{dt} = x'(t) = \dot{x}(t) \right)$
- Beschleunigung a : $a(t) = \frac{d}{dt}\, v(t) = \frac{d^2}{dt^2}\, x(t) \quad \left(= \ddot{x}(t) \right)$
- Impuls $p = mv$
- Kinetische Energie $T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{p^2}{2m}$

Beispiel: $x(t) = \alpha t^2$ (für $t > 0$)

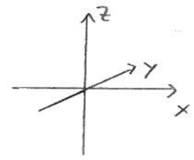


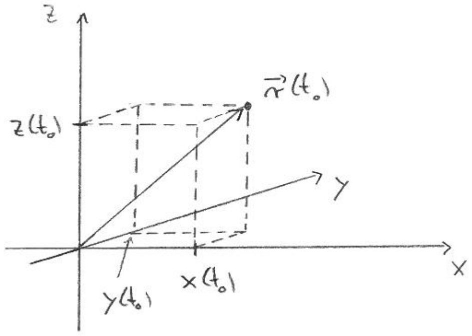
Impuls : $p = 2m\alpha t \quad (= p(t))$

Kinetische Energie : $T = \frac{1}{2} m \, (2\alpha t)^2 = 2m\alpha^2 t^2 \quad (= T(t))$

jetzt : dreidimensionale Bewegung

⟶ Darstellung in einem Kartesischen Koordinatensystem :





zur Zeit t_0 hat der Körper die Koordinaten

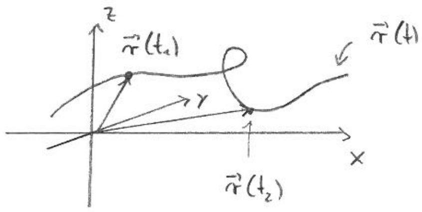
$x(t_0), y(t_0), z(t_0)$

d.h. Ort zur Zeit t_0 gegeben durch Punkt in $\mathbb{R}^3$

$$\longrightarrow \quad \vec{r}(t_0) = \begin{pmatrix} x(t_0) \\ y(t_0) \\ z(t_0) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \qquad \vec{r}(t_0) \,\hat{=}\, \text{Vektor}$$

die vektorwertige Funktion $\vec{r}(t)$ beschreibt die Bewegung im dreidimensionalen Raum

$$\boxed{\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}}$$



Geschwindigkeit :

$$\vec{v}(t) = \frac{d}{dt}\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt}x(t) \\ \frac{d}{dt}y(t) \\ \frac{d}{dt}z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ v_z(t) \end{pmatrix}$$

d.h. : jede Komponente des Vektors $\vec{r}(t)$ wird einzeln differenziert

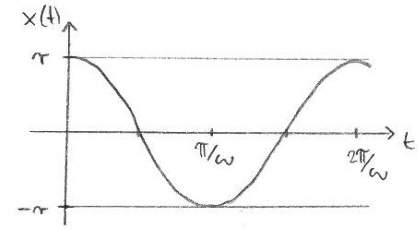
Beschleunigung :

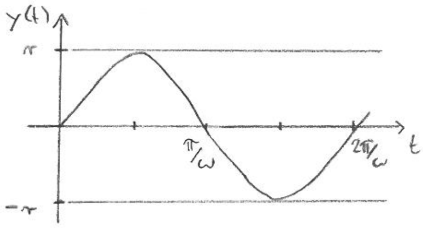
$$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt}\vec{v}(t) = \frac{d^2}{dt^2}\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} a_x(t) \\ a_y(t) \\ a_z(t) \end{pmatrix}$$

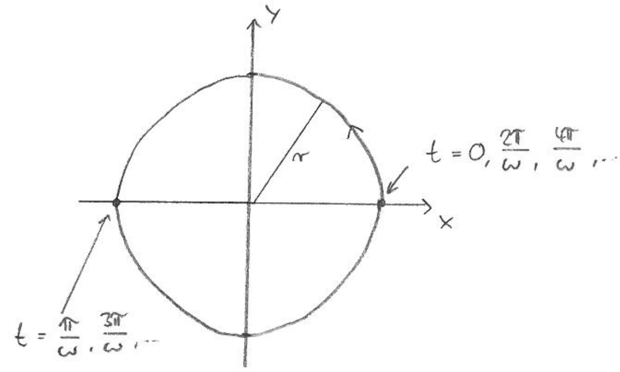
Beispiele

1. Kreisbahn

$$\vec{r}(t) = r \begin{pmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{in } \mathbb{R}^3 \qquad \text{oder:} \quad \vec{r}(t) = r \begin{pmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \end{pmatrix} \quad \text{in } \mathbb{R}^2$$



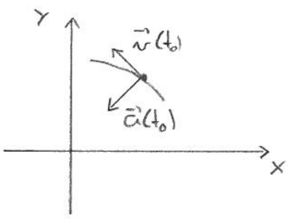




Geschwindigkeit: $\vec{v}(t) = \omega r \begin{pmatrix} -\sin \omega t \\ \cos \omega t \end{pmatrix}$

Beschleunigung: $\vec{a}(t) = \omega^2 r \begin{pmatrix} -\cos \omega t \\ -\sin \omega t \end{pmatrix} \overset{!}{=} -\omega^2 \vec{r}(t)$

zur Zeit $t_0 = \frac{\pi}{4\omega}$:

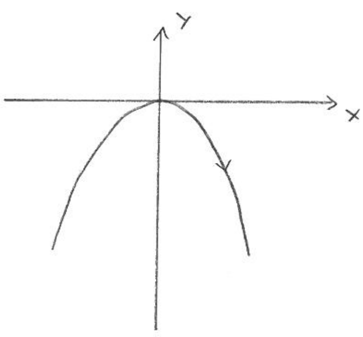


2. Parabel

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} v_x t \\ -\frac{1}{2} g t^2 \end{pmatrix}$$

v_x : Geschwindigkeit in x-Richtung

g : Beschleunigung in (-y)-Richtung



$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_x \\ -gt \end{pmatrix}$$

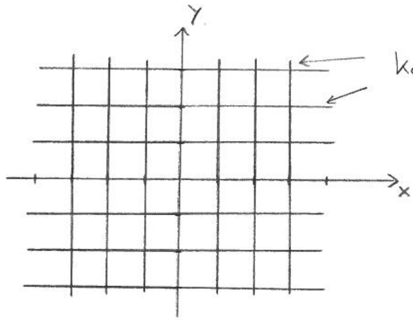
$$\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

Koordinatensysteme

man unterscheidet:

a) geradlinige Koordinatensysteme

z.B. Kartesische Koordinaten

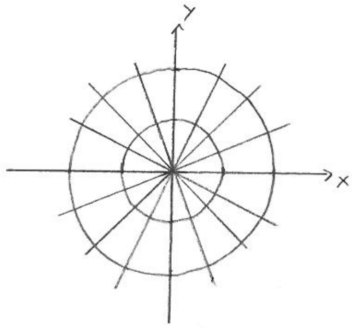


Koordinatenlinien

→ geradlinig und orthogonal

b) Krummlinige Koordinatensysteme

z.B. Polarkoordinaten

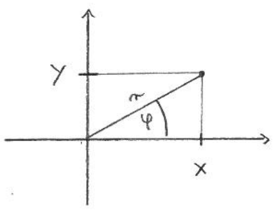


→ ebenfalls orthogonal

jetzt: drei Beispiele für b)

1. Polarkoordinaten (r, φ)

Beschreibung eines Punktes im $\mathbb{R}^2$ durch die Koordinaten (r, φ) anstelle der Kartesischen Koordinaten (x, y)



es gilt:

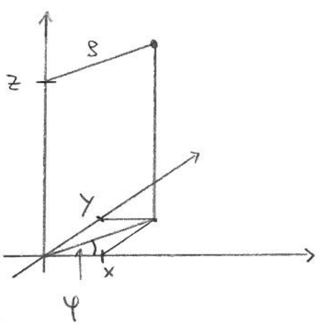
$$x = r\cos\varphi \qquad r = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$y = r\sin\varphi \qquad \tan\varphi = \frac{y}{x}$$

$$\rightarrow \quad \varphi \in [0, 2\pi[\quad , \quad r \geq 0$$

2. Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z)

Beschreibung eines Punktes im $\mathbb{R}^3$ durch die Koordinaten (ρ, φ, z)



es gilt:

$$x = \rho\cos\varphi \qquad \rho = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$y = \rho\sin\varphi \qquad \tan\varphi = \frac{y}{x}$$

$$z = z \qquad z = z$$

$$\rightarrow \quad \varphi \in [0, 2\pi[\quad , \quad \rho \geq 0$$

zu beachten: sei $\vec{r} = \begin{pmatrix} \varrho \cos\varphi \\ \varrho \sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$

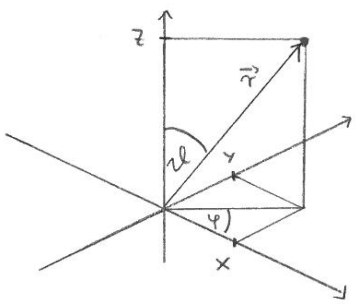
es gilt: $|\vec{r}| \neq \varrho$ (für $z \neq 0$), denn $|\vec{r}|^2 = \varrho^2 \cos^2\varphi + \varrho^2 \sin^2\varphi + z^2$
$= \varrho^2 + z^2$

Beispiele für Bahnen in krummlinigen Koordinaten:

→ Kreisbahn in Polarkoordinaten: $r(t) = r = \text{const.}$
$\varphi(t) = \omega t$

→ Schraubenbahn (Helix) in Zylinderkoordinaten: $\varrho(t) = \varrho = \text{const}$
$\varphi(t) = \omega t$
$z = \alpha t$

3. Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ)



es gilt: $x = r \sin\vartheta \cos\varphi$ $\qquad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$
$y = r \sin\vartheta \sin\varphi$ $\qquad \tan\vartheta = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$
$z = r \cos\vartheta$ $\qquad \tan\varphi = \frac{y}{x}$

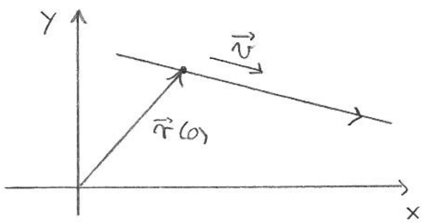
$\vartheta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi[$, $r \geq 0$

2. elementare Newtonsche Mechanik

die Newtonschen Axiome → Isaac Newton 1686/87
Philosophiae Naturalis Principia Mathematica

1. Axiom → Trägheitsgesetz

Für die Bahn eines Körpers gilt: $\vec{v} = \text{const}$ (gleichförmige Bewegung), wenn keine Kräfte auf ihn wirken



$\vec{r}(t) = \vec{r}(0) + \vec{v}\, t$

$\Rightarrow \frac{d}{dt} \vec{r}(t) = \vec{v}$ $(= \text{const})$

→ dies impliziert die Wahl eines geeigneten Bezugssystems

⇒ sog. Inertialsysteme : definiert als Bezugssysteme, in denen ein Körper, auf den keine Kräfte wirken, sich gleichförmig bewegt.

2. Axiom → Bewegungsgesetz

beschreibt die Änderung der Bewegung aufgrund der Einwirkung von Kräften

das 2. Axiom lautet : $\boxed{\dfrac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}}$

mit : → $\vec{p} = m\vec{v}$ Impuls (vektor)

→ m : 'träge' Masse (im Gegensatz zur 'schweren' Masse)

→ $\vec{F}$: Gesamtkraft, die auf das Teilchen einwirkt

für $m = \text{const}$ folgt :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m \underbrace{\frac{d\vec{v}}{dt}}_{=\vec{a}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{F} = m\vec{a}}$$

Kraft = Masse · Beschleunigung

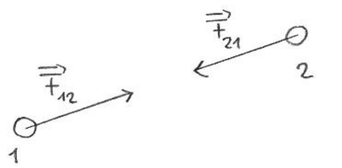
das 2. Axiom für $\vec{F} = \vec{0}$

$$\rightarrow \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0} \quad \underset{m \neq 0}{\Longrightarrow} \quad \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0} \quad , \quad \vec{v} = \text{const}$$

d.h. das 1. Axiom ist als Spezialfall im 2. Axiom enthalten

3. Axiom → Gegenwirkungsprinzip

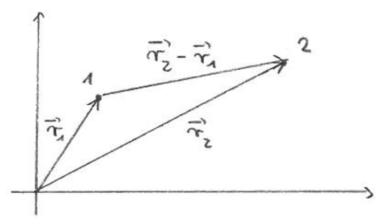
sei $\vec{F}_{ij}$ die Kraft, die der Körper j auf den Körper i ausübt



das 3. Axiom lautet : $\boxed{\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}}$

Zusatz zum 3. Axiom : Kräfte zwischen zwei Massenpunkten wirken stets in Richtung der Verbindungslinie

Verbindungslinie $\hat{=}$ Vektor $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$

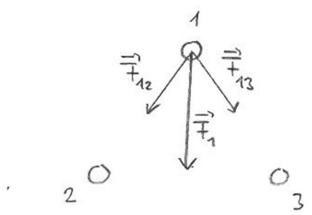


$\vec{F}_{12} \parallel (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$ bzw. $\vec{F}_{12} = \alpha\,(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$

$\Rightarrow \quad \vec{F}_{12} \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = \vec{0}$ allgemein: $\boxed{\vec{F}_{ij} \times (\vec{r}_j - \vec{r}_i) = \vec{0}}$

weitere Zusatz zu den Newtonschen Axiomen $\rightarrow$ Superpositionsprinzip

d.h.: Kräfte addieren sich wie Vektoren, z.B.:



hier: $\vec{F}_1$ = die Gesamtkraft, die auf den Körper 1 einwirkt

$\rightarrow \quad \vec{F}_1 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13}$

einfaches Beispiel: eindimensionale Bewegung eines Körpers unter Einwirkung einer zeitabhängigen Kraft

setze $\vec{F} = \begin{pmatrix} F \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

2. Axiom: $\vec{F} = m \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}(t) \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} F \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} \ddot{x}(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \quad \boxed{F = m\,\ddot{x}(t)}$

im folgenden: $F = f(t)$, also $\ddot{x}(t) = \frac{1}{m} f(t) \quad (*)$

$\rightarrow$ die Bahn, also $x(t)$, ergibt sich durch zweifache Integration der Newtonschen Bewegungsgleichung $(*)$

z.B.: $f(t) = \alpha t \quad \rightarrow \quad \ddot{x}(t) = \frac{\alpha}{m} t$

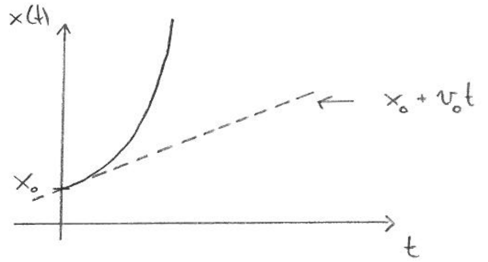
1. Integration: $\dot{x}(t) = \underbrace{\dot{x}(0)}_{= v_0} + \int_0^t dt'\, \ddot{x}(t') = v_0 + \frac{\alpha}{m} \underbrace{\int_0^t dt'\, t'}_{= \frac{1}{2} t^2}$

$$\Rightarrow \quad v(t) = \dot{x}(t) = v_0 + \frac{\alpha}{2m} t^2$$

<u>2. Integration</u>: $\quad x(t) = \underbrace{x(0)}_{= x_0} + \int_0^t dt' \, \dot{x}(t')$

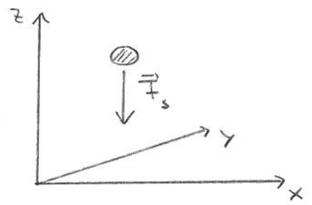
$$= x_0 + \int_0^t dt' \left(v_0 + \frac{\alpha}{2m} t'^2 \right)$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{\alpha}{6m} t^3$$



C. Integration

<u>Bewegung im Schwerefeld der Erde</u>



Schwerkraft: $\vec{F}_s = m_s \vec{g}$

m_s: 'schwere' Masse

mit $\vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}$ und der Erdbeschleunigung $g = 9.81 \, \frac{m}{s^2}$

<u>Annahme</u>: der Vektor $\vec{F}_s$ ist konstant (zeitlich und räumlich)

<u>Newtonsche Bewegungsgleichung</u>: $\quad \vec{F}_s = m_t \vec{a} \qquad m_t$: 'träge' Masse

$\Rightarrow \quad m_s \vec{g} = m_t \vec{a}$, für $m_s = m_t$ folgt: $\quad \vec{a} = \vec{g}$, $\vec{a} = \ddot{\vec{r}}(t)$

zweifache Integration von $\ddot{\vec{r}}(t) = \vec{g}$ ergibt:

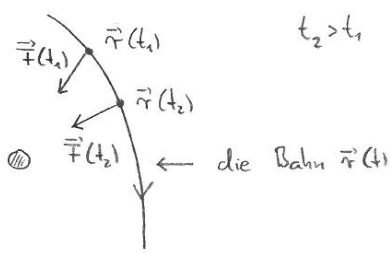
$$\boxed{\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} t^2 \vec{g}}$$

mit den Anfangsbedingungen:

$\vec{r}(t=0) = \vec{r}_0 \quad , \quad \vec{v}(t=0) = \vec{v}_0$

<u>zu beachten</u>: i.A. ist die Zeitabhängigkeit der Kraft <u>nicht</u> gegeben

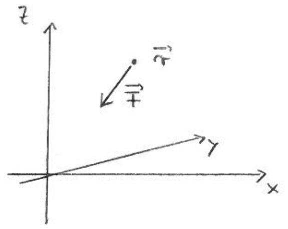
$\longrightarrow$ Bewegung eines Teilchens im Kraftfeld



Stattdessen: $\vec{F}$ ist gegeben als Funktion von $\vec{r}$

$\longrightarrow$ $\boxed{\text{Kraftfeld } \vec{F}(\vec{r})}$ sog. 'Vektorfeld'

Beispiel: Zentralkraft



d.h. $\vec{F} \parallel \vec{r}$

schreibe: $\vec{F}(\vec{r}) = f(r) \underbrace{\frac{\vec{r}}{r}}_{\text{Einheitsvektor in Richtung } \vec{r}}$ mit $r = |\vec{r}|$

$f(r)$: (beliebige) Funktion, die nur von $r = |\vec{r}|$ abhängt

$f(r) > 0$: abstoßende Kraft

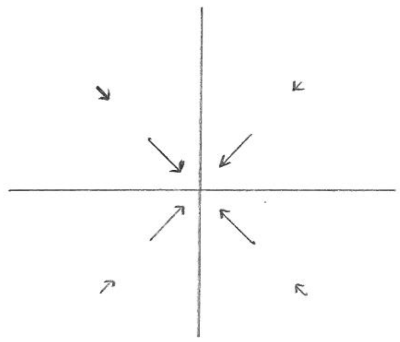
$f(r) < 0$: anziehende Kraft

Spezielle: Gravitationskraft

$\longrightarrow$ im Koordinatenursprung befinde sich eine Masse M (fest)

$\Rightarrow$ $\boxed{\vec{F}_G(\vec{r}) = -GmM \frac{\vec{r}}{r^3}}$ d.h. $f(r) = -GmM \frac{1}{r^2}$ (<0)

$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$



$|\vec{F}_G(\vec{r})| = GmM \frac{1}{r^2}$

fällt mit dem Abstand ab wie $\frac{1}{r^2}$

Ausblick: Berechnung von $\vec{r}(t)$ für gegebenes $\vec{F}(\vec{r})$

$\longrightarrow$ Lösung von $m\ddot{\vec{r}}(t) = \vec{F}(\vec{r}(t))$

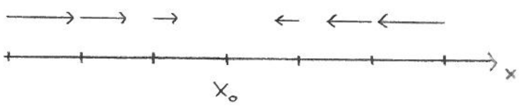
Differentialgleichung 2. Ordnung für $\vec{r}(t)$

D. skalare Felder ...

Potential

zunächst für den eindimensionalen Fall $\longrightarrow$ betrachte ein eindimensionales Kraftfeld $F(x)$

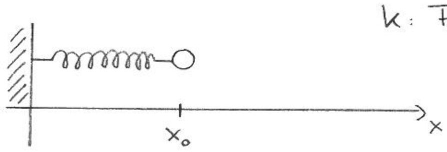
Beispiel: Hooke'sches Gesetz $F(x) = -k(x-x_0)$



x_0 : Ruhelage $\longrightarrow F(x_0) = 0$

k : Federkonstante

Masse an einer Feder :



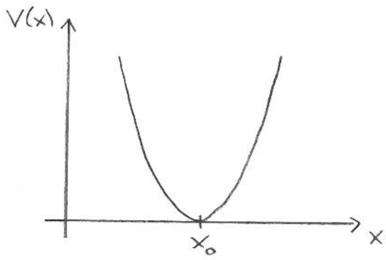
Zusammenhang: Kraft und Potential

im eindimensionalen Fall gilt : $\boxed{F(x) = -\frac{d}{dx} V(x)}$ V : Potential

Für das Hooke'sche Gesetz folgt :

$$V(x) = \frac{k}{2}(x-x_0)^2$$

„harmonisches Potential"



jetzt: Verallgemeinerung auf ein Vektorfeld $\vec{F}(\vec{r})$ als Kraftfeld

der Zusammenhang zwischen Kraftfeld und Potential ist gegeben durch :

$$\boxed{\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(\vec{r})}$$

mit dem skalaren Potential $V(\vec{r})$

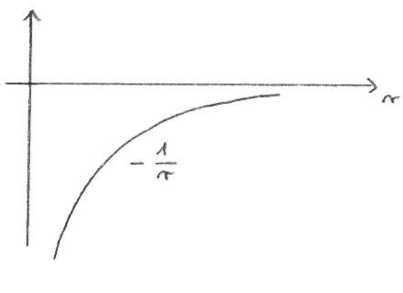
$\hookrightarrow$ ein skalares Feld

und dem sog. Nabla-Operator $\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$

E. partielle Ableitungen

Gravitationspotential

$$\boxed{V_G(\vec{r}) = -GmM\frac{1}{r}}$$



$$\Rightarrow \quad \vec{F}_G(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V_G(\vec{r}) = GmM\,\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right) = -GmM\,\frac{\vec{r}}{r^3} \quad \checkmark$$

dreidimensionales, harmonisches Potential

$$\boxed{V(\vec{r}) = \frac{k}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)} \quad \Rightarrow \quad \vec{F}(\vec{r}) = -\frac{k}{2}\,\vec{\nabla}\left(x^2+y^2+z^2\right)$$

$$= -\frac{k}{2}\begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} = -k\vec{r}$$

3. Erhaltungssätze

allgemein: eine physikalische Größe $A(t)$ ist (zeitlich) erhalten, falls $\frac{dA}{dt} = 0$

$\longrightarrow$ sog. Erhaltungsgröße

im Folgenden: Impuls, Drehimpuls, Energie sind (unter bestimmten Bedingungen) Erhaltungsgrößen

a) Impulserhaltung

zunächst für ein einzelnes Teilchen

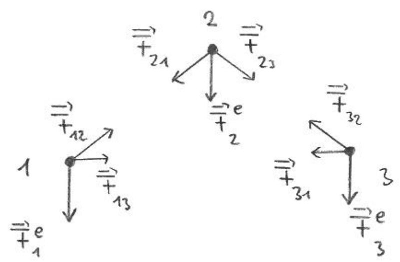
$\longrightarrow$ es gilt: $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$ (2. Axiom)

$\Rightarrow$ der Impuls $\vec{p}$ ist erhalten, d.h. $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0}$, falls $\vec{F} = \vec{0}$ ($\hat{=}$ 1. Axiom)

jetzt: für ein System aus N Teilchen an den Orten $\vec{r}_i(t)$, $i = 1,\dots,N$ mit Massen m_i

$\vec{F}_{ij}$: innere Kräfte

$\vec{F}_i^e$: äußere Kräfte



Definition: Schwerpunkt $\boxed{\vec{R} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}$

mit der Gesamtmasse $M = \sum_{i=1}^{N} m_i$

Definition: Schwerpunktimpuls $\boxed{\vec{P} = M\dot{\vec{R}}}$

es gilt: $M\dot{\vec{R}} = \sum_{i=1}^{N} \underbrace{m_i \dot{\vec{r}}_i}_{=\vec{p}_i} \quad \Rightarrow \quad \vec{P} = \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i}_{=\text{Gesamtimpuls}}$

unter welchen Bedingungen ist $\vec{P}$ eine Erhaltungsgröße?

$\longrightarrow$ bilde $\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \underbrace{\frac{d\vec{p}_i}{dt}}_{=\vec{F}_i}$: 2. Axiom für Teilchen i

mit der Gesamtkraft auf Teilchen i: $\vec{F}_i = \vec{F}_i^e + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \vec{F}_{ij}$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^e + \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \vec{F}_{ij}}_{=\vec{0} \ \text{(siehe Übungen)}}$$

d.h.: der Schwerpunktimpuls $\vec{P}$ ist erhalten, falls $\vec{F}_i^e = \vec{0}$

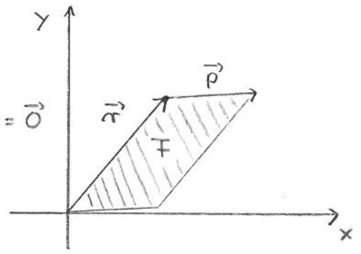
b, Drehimpulserhaltung

Definition: Drehimpuls relativ zum Bezugspunkt $\vec{r}_0$

$\boxed{\vec{\ell} = (\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{p}}$ im Folgenden: setze $\vec{r}_0 = \vec{0}$

$\rightarrow \vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p}$

für $\vec{r}_0 = \vec{0}$



es gilt: $|\vec{\ell}| = |\vec{r} \times \vec{p}| = $ Fläche F

für eine Bahn $\vec{r}(t)$ mit $\vec{p}(t) = m\dot{\vec{r}}(t)$

$\longrightarrow \vec{\ell}(t) = \vec{r}(t) \times \vec{p}(t)$

unter welchen Bedingungen ist $\vec{\ell}$ eine Erhaltungsgröße? $\longrightarrow$ bilde $\frac{d\vec{\ell}}{dt}$

es gilt die Produktregel $\frac{d}{dt}\left(\vec{r}(t) \times \vec{p}(t)\right) = \dot{\vec{r}}(t) \times \vec{p}(t) + \vec{r}(t) \times \dot{\vec{p}}(t)$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\vec{\ell}}{dt} = \underbrace{m\,\dot{\vec{r}}(t) \times \dot{\vec{r}}(t)}_{=\vec{0}} + \vec{r}(t) \times \underbrace{\dot{\vec{p}}(t)}_{=\vec{F}\ (2.\ \text{Axiom})}$$

<u>Definition</u>: das von der Kraft $\vec{F}$ auf den Körper ausgeübte Drehmoment

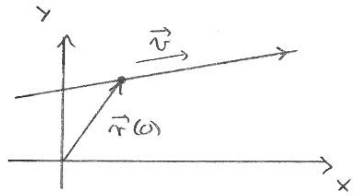
$$\boxed{\vec{m} = \vec{r} \times \vec{F}} \qquad (\text{allgemein: } \vec{m} = (\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{F})$$

$\Rightarrow \quad \frac{d\vec{\ell}}{dt} = \vec{m}$, d.h. der Drehimpuls $\vec{\ell}$ ist erhalten, falls $\vec{m} = \vec{0}$

das Drehmoment ist $= \vec{0}$ für:

<u>i, $\vec{F} = \vec{0}$</u>

betrachte eine gleichförmige Bewegung



$$\vec{r}(t) = \vec{r}(0) + \vec{v}t$$

$$\rightarrow \quad \vec{p}(t) = m\vec{v}$$

in diesem Fall folgt für den Drehimpuls:

$$\vec{\ell}(t) = \vec{r}(t) \times \vec{p}(t) = m\left(\vec{r}(0) + \vec{v}t\right) \times \vec{v} =$$

$$= m\,\vec{r}(0) \times \vec{v} + m\,t\,\underbrace{\vec{v} \times \vec{v}}_{=\vec{0}} = m\,\vec{r}(0) \times \vec{v} \quad \text{unabhängig von } t$$

<u>ii, $\vec{r} \parallel \vec{F}$</u>

d.h. für ein Teilchen im Feld einer Zentralkraft

<u>c, Energieerhaltung</u>

Ausgangspunkt: $F(x(t)) = m\,\ddot{x}(t) \quad | \cdot \dot{x}(t)$

(zunächst nur: $N=1$, $d=1$) $\quad F(x(t))\,\dot{x}(t) = m\,\ddot{x}(t)\,\dot{x}(t) \overset{!}{=} \frac{d}{dt}\Big[\underbrace{\tfrac{1}{2} m \left(\dot{x}(t)\right)^2}_{=T(t)}\Big]$

<u>Definition</u>

kinetische Energie $\boxed{T = \frac{1}{2} m (\dot{x})^2} \qquad \left(= \frac{1}{2} m v^2\right)$

es gilt also : $\frac{d}{dt} T(t) = F(x(t))\,\dot{x}(t) \quad \Big| \int_{t_a}^{t_b} \dots dt$

$$\underbrace{\int_{t_a}^{t_b} \left[\frac{d}{dt} T(t) \right] dt}_{= T(t_b) - T(t_a)} = \underbrace{\int_{t_a}^{t_b} F(x(t))\,\dot{x}(t)\, dt} = \dots$$

Substitution : $x = x(t)$; $F(x(t)) \to F(x)$

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x}(t) \to dx = \dot{x}(t)\,dt$$

$$\int_{t=t_a}^{t=t_b} \dots \to \int_{x=x(t_a)=x_a}^{x=x(t_b)=x_b}$$

$$\dots = \int_{x_a}^{x_b} F(x)\,dx \underset{\substack{\uparrow \\ F(x) = -\frac{d}{dx}V(x)}}{=} \left[-V(x) \right]_{x_a}^{x_b} = -V(x_b) + V(x_a)$$

$$\Longrightarrow \quad T(t_b) - T(t_a) = -V(x(t_b)) + V(x(t_a)) \qquad (*)$$

Definition: (Gesamt-) Energie eines Teilchens der Masse m im Potential $V(x)$

$\boxed{E = T + V}$ mit $T = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}(t)\right)^2$: Kinetische Energie

$V = V(x(t))$: potentielle Energie

aus Gl. $(*)$ folgt:

$$\underbrace{T(t_b) + V(x(t_b))}_{= E(t_b)} = \underbrace{T(t_a) + V(x(t_a))}_{= E(t_a)}$$

$\to E(t_a) = E(t_b)$ für beliebige t_a, t_b $\Rightarrow$ E ist eine Erhaltungsgröße

jetzt: $N = 1$, Dimension $d = 3$

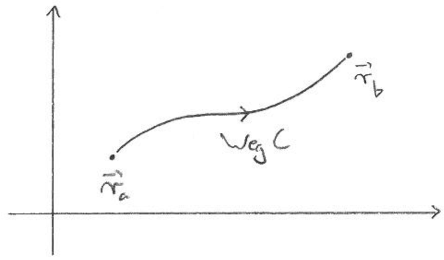
zunächst analog zu $d = 1$: $\vec{F}(\vec{r}(t)) = m\ddot{\vec{r}}(t) \quad \big| \cdot \dot{\vec{r}}(t)$

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t) = m\ddot{\vec{r}}(t) \cdot \dot{\vec{r}}(t) \overset{!}{=} \frac{d}{dt} \underbrace{\left[\frac{1}{2} m \left(\dot{\vec{r}}(t) \cdot \dot{\vec{r}}(t) \right) \right]}_{= T(t) \text{ : Kinetische Energie}}$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\int_{t_a}^{t_b} \left[\frac{d}{dt} T(t) \right] dt}_{= T(t_b) - T(t_a)} = \underbrace{\int_{t_a}^{t_b} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t) \, dt}$$

$$= \int_{\vec{r}_a, C}^{\vec{r}_b} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$: das Wegintegral über das Vektorfeld $\vec{F}(\vec{r})$ von $\vec{r}_a = \vec{r}(t_a)$ bis $\vec{r}_b = \vec{r}(t_b)$ entlang des $\underbrace{\text{Wegs}}$ C

$\hat{=}$ der Bahn $\vec{r}(t)$



falls sich $\vec{F}(\vec{r})$ als Gradientenfeld darstellen lässt, also $\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(\vec{r})$

$$\longrightarrow \int_{\vec{r}_a, C}^{\vec{r}_b} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = - \int_{\vec{r}_a, C}^{\vec{r}_b} \left(\vec{\nabla} V(\vec{r}) \right) \cdot d\vec{r} = - \left(V(\vec{r}_b) - V(\vec{r}_a) \right)$$

$\uparrow$ unabhängig vom Verlauf des Wegs C !

$$\Rightarrow \quad T(t_a) + V(\vec{r}(t_a)) = T(t_b) + V(\vec{r}(t_b))$$

daraus folgt, wie im eindimensionalen Fall:

$E = T + V$ ist eine Erhaltungsgröße mit

$T = \frac{1}{2} m |\dot{\vec{r}}(t)|^2$: kinetische Energie

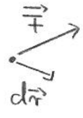
$V = V(\vec{r}(t))$: potentielle Energie

F. Wegintegrale

<u>der Begriff 'Arbeit'</u>

Arbeit = Kraft $\cdot$ Weg $\longrightarrow$ in $d=1$: $dW = F \, dx$

allg.: $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$



$\Rightarrow$ die von der Kraft $\vec{F}$ entlang der Bahn C am Teilchen geleistete Arbeit

$$\boxed{W = \int_{\vec{r}_a, C}^{\vec{r}_b} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}}$$

N-Teilchen-Systeme

Gesamtenergie: $E = T + V$

mit der gesamten kinetischen Energie: $T = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \, |\dot{\vec{r}}_i(t)|^2$

und der gesamten potentiellen Energie:

$$V = \underbrace{\sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} V_{ij}(\vec{r}_i, \vec{r}_j)}_{\text{internes Potential}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{N} V_i^e(\vec{r}_i)}_{\text{externes Potential}}$$

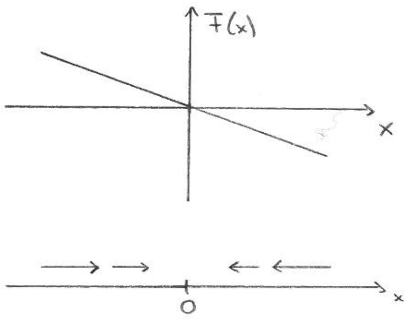
4. Bewegung in einer Dimension

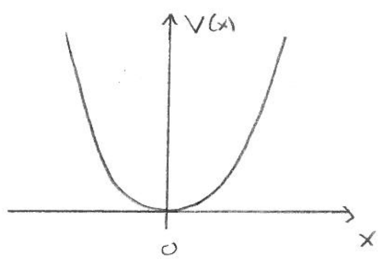
Newtonsche Bewegungsgleichung in $d = 1$

$$\boxed{F(x(t)) = m\ddot{x}(t)}$$

beschreibt die Bewegung eines Teilchens im Kraftfeld $F(x)$ (bzw. im Potential $V(x)$ mit $F(x) = -V'(x)$)

z.B.: $F(x) = -kx$ $\longrightarrow$ $V(x) = \frac{1}{2} k x^2$





für diesen Fall gilt: $F(x(t)) = -kx(t)$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{-kx(t) = m\ddot{x}(t)}$$

$\longrightarrow$ Differentialgleichung (Dgl) für die Funktion $x(t)$

gesucht: Lösung der Dgl. für gegebene Anfangsbedingungen

$x(0) = x_0$

$\dot{x}(0) = v(0) = v_0$

betrachte die folgende Bahn:

$$x(t) = A\cos(\omega t) \qquad \text{mit} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

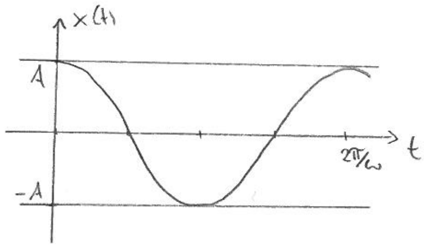
$$\longrightarrow \quad \dot{x}(t) = -A\omega \sin(\omega t) \quad , \quad \dot{x}(0) = 0$$

$$\ddot{x}(t) = -A\omega^2 \cos(\omega t)$$

Einsetzen in die Dgl. ergibt:

$$-kA\cos(\omega t) = -\underbrace{Am\omega^2}_{=Ak} \cos(\omega t)$$

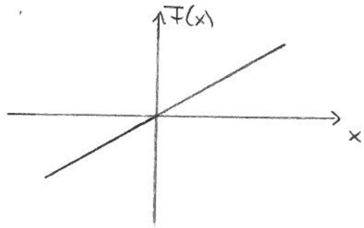
ok., d.h. $x(t)$ ist eine Lösung der Dgl. für die Anfangsbed. $x_0 = A$, $v_0 = 0$



Wie erhält man die Lösung der Dgl. für beliebige Anfangsbed. x_0 und v_0 ?

<u>Zweites Beispiel</u>: $V(x) = -\frac{1}{2}kx^2 \quad (k>0)$

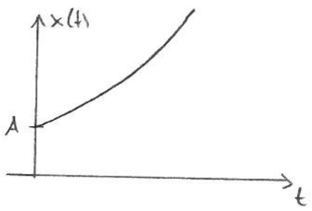
$$\rightarrow \quad F(x) = kx$$



betrachte die folgende Bahn:

$$x(t) = A e^{\lambda t} \quad \text{mit} \quad \lambda = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\rightarrow \quad \ddot{x}(t) = A\lambda^2 e^{\lambda t}$$



d.h. $x(t) = Ae^{\lambda t}$ ist eine Lösung der Dgl. $\boxed{kx(t) = m\ddot{x}(t)}$

für die Anfangsbed. $x_0 = A$, $v_0 = A\sqrt{\frac{k}{m}}$

G. Differentialgleichungen

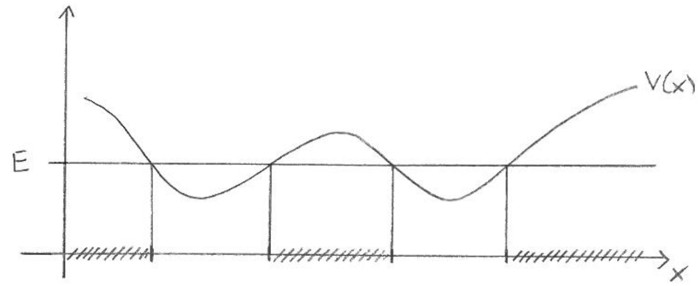
<u>jetzt</u>: $\longrightarrow$ Bewegung in einem beliebigen eindimensionalen Potential $V(x)$

$\longrightarrow$ die Gesamtenergie $E = T + V$ sei vorgegeben

es gilt: $E - V = T = \frac{1}{2}m(\dot{x}(t))^2 \geq 0$ d.h. $E - V \geq 0$

$$E \geq V(x)$$

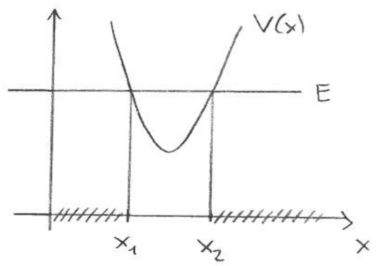
$\Rightarrow$ die Bewegung des Körpers ist eingeschränkt auf x-Werte mit $E \geq V(x)$



↳ (klassisch) verbotene Bereiche

Bewegungstypen

a) gebundene Bewegung



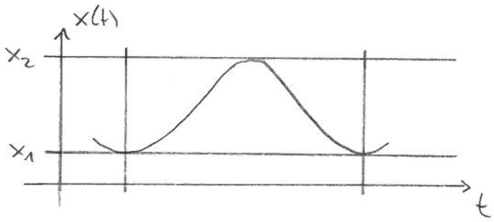
$E > V(x)$ für $x_1 < x < x_2$

$\underbrace{E = V(x)}$ für $x = x_1$ und $x = x_2$

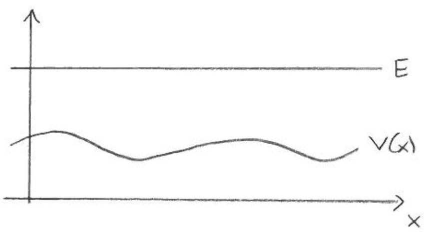
d.h. $T = 0 \longrightarrow \dot{x} = 0$

$\Rightarrow$ $x_{1/2}$ sind die Umkehrpunkte

d.h. das Teilchen ist im Interval $[x_1, x_2]$ eingesperrt $\longrightarrow$ periodische Bewegung:



b) ungebundene Bewegung



$E > V(x)$ für alle x

$\Rightarrow$ Teilchen bewegt sich mit variabler Geschwindigkeit nach rechts oder links (je nach Anfangsbedingung)

c) Ruhelagen

betrachte einen Punkt x_0 mit $F(x_0) = -V'(x_0) = 0$

und die Anfangsbedingungen $x(t=0) = x_0$ I

$\dot{x}(t=0) = 0$ II

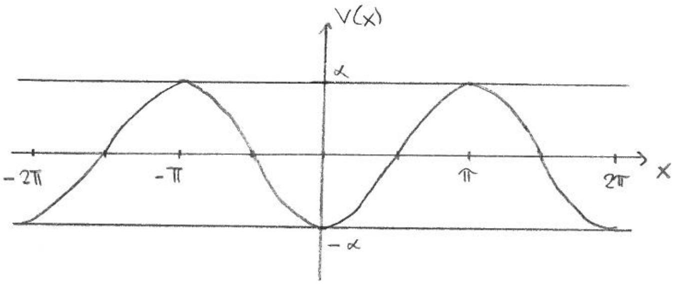
aus I folgt: $\ddot{x}(t=0) = \frac{1}{m} F(x_0) = 0$ III

aus II und III folgt: Teilchen ruht bei $x = x_0$

d.h. $x(t) = x_0$ für alle $t > 0$

Beispiel:

$$V(x) = -\alpha \cos(x)$$
$$(\alpha > 0)$$



$\longrightarrow$ Ruhelagen bei:

- $x_n = n\,2\pi \,, \quad n \in \mathbb{Z}$

  $\rightarrow \quad V''(x_n) > 0 \quad$: Minima

- $\bar{x}_m = (m + \frac{1}{2})\,2\pi \,, \quad m \in \mathbb{Z}$

  $\rightarrow \quad V''(\bar{x}_m) < 0 \quad$: Maxima

Kraft: $\quad F(x) = -V'(x) = -\alpha \sin(x)$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{-\alpha \sin(x(t)) = m\,\ddot{x}(t)} \quad (*) \quad \text{nicht-lineare Dgl. !}$$

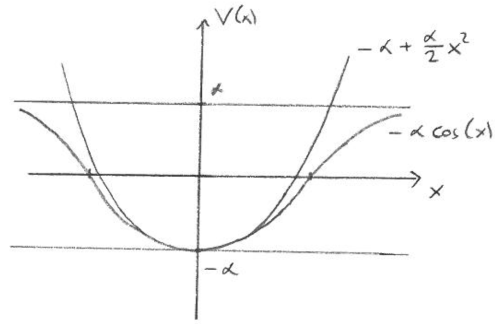
jetzt: betrachte die Bewegung in der Nähe der Ruhelage $x_0 = 0$ für kleine Auslenkungen $|x| \ll 1$

es gilt: $\quad \cos(x) \approx \underbrace{1 - \frac{1}{2}x^2}$ $\quad$ für $|x| \ll 1$

sog. Taylor-Entwicklung von $\cos(x)$ bis zur Ordnung x^2

das ergibt als Näherung für das Potential:

$$V(x) \approx -\alpha\left(1 - \frac{1}{2}x^2\right) = -\alpha + \frac{\alpha}{2}x^2$$



Kraft: $\quad F(x) = -\alpha x$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{-\alpha\, x(t) = m\,\ddot{x}(t)} \quad (**) \quad \text{lineare Dgl.}$$

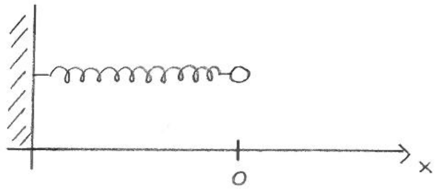
das bedeutet: in der Nähe der Ruhelagen lässt sich mit Hilfe einer Taylor-Entwicklung des Potentials die nicht-lineare Dgl (*) durch eine lineare Dgl (**) annähern.

Lösung der linearen Dgl $\longrightarrow$ siehe Kap. G

H. Taylorentwicklung

gedämpfte Schwingung

$\longrightarrow$ Masse an einer Feder mit zusätzlicher Reibung



Hooke'sches Gesetz $F_H(x) = -kx \qquad k>0$

Reibungskraft : $F_R(\dot{x}) = -\bar{\gamma}\dot{x} \qquad \bar{\gamma}>0$

$\longrightarrow$ F_R ist propotional zur Geschwindigkeit

Gesamtkraft : $F(x,\dot{x}) = F_H(x) + F_R(\dot{x}) = -kx - \bar{\gamma}\dot{x}$

Newtonsche Bewegungsgleichung : $F(x(t),\dot{x}(t)) = m\ddot{x}(t)$

$\Rightarrow$ $\boxed{k\,x(t) + \bar{\gamma}\dot{x}(t) + m\ddot{x}(t) = 0}$ gewöhnliche Dgl mit den Konstanten Koeffizienten $a_0 = k,\ a_1 = \bar{\gamma},\ a_2 = m$

Ansatz (siehe Kap. 6) : $x(t) = A e^{\alpha t}$

$\longrightarrow$ die möglichen Werte für α ergeben sich als Nullstellen der Funktion $f(\alpha)$ mit

$f(\alpha) = k + \bar{\gamma}\alpha + m\alpha^2$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha_{1/2} = \frac{1}{2m}\left(-\bar{\gamma} \pm \sqrt{\bar{\gamma}^2 - 4mk}\right)}$$

mit $\gamma = \frac{\bar{\gamma}}{2m}$ und $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ergibt sich :

$$\alpha_{1/2} = -\frac{\bar{\gamma}}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{\bar{\gamma}}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$$

Fallunterscheidung

1. $0 < \gamma < \omega$ (schwache Dämpfung)

$\longrightarrow$ $\gamma^2 - \omega^2 < 0$ d.h. das Argument der Wurzel ist negativ !

schreibe $\sqrt{\gamma^2-\omega^2} = \sqrt{(-1)(\omega^2-\gamma^2)} = \underbrace{\sqrt{-1}}_{=i}\underbrace{\sqrt{\omega^2-\gamma^2}}_{=\omega'} = i\omega'$ $\qquad$ ω' ist reell

$\Rightarrow$ $\alpha_{1/2} = -\gamma \pm i\omega'$

2. $\gamma = \omega$ (aperiodischer Grenzfall)

$\alpha_{1/2} = -\gamma$

3. $\gamma > \omega$ (starke Dämpfung)

$\rightarrow \quad \gamma^2 - \omega^2 > 0$ d.h. $\sqrt{\gamma^2-\omega^2}$ ist reell

für $0 < \omega < \gamma$ gilt: $\sqrt{\gamma^2-\omega^2} < \gamma$

$\Rightarrow \quad \alpha_{1/2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2-\omega^2}$ beide < 0 (und $\alpha_i \in \mathbb{R}$)

Diskussion der einzelnen Fälle:

__1. $0 < \gamma < \omega$ (schwache Dämpfung)__

$\alpha_{1/2} = -\gamma \pm i\omega'$ mit $\omega' = \sqrt{\omega^2-\gamma^2}$

$\rightarrow$ Lösungen der Dgl: $x_1(t) = c_1 e^{\alpha_1 t}$, $x_2(t) = c_2 e^{\alpha_2 t}$ $\quad c_{1/2} \in \mathbb{C}$

$$e^{(-\gamma \pm i\omega')t} = e^{-\gamma t} e^{\pm i\omega' t}$$

$\Rightarrow$ allgemeine Lösung
$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = e^{-\gamma t}\left(c_1 e^{i\omega' t} + c_2 e^{-i\omega' t}\right)$$

d.h.: $x(t)$ ist i.A. imaginär

deshalb $\rightarrow$ setze
$$c_1 = \frac{1}{2}(a - ib)$$
$$c_2 = \frac{1}{2}(a + ib) \quad \text{mit } a, b \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x(t) = e^{-\gamma t}\left(a\cos(\omega' t) + b\sin(\omega' t)\right)}$$

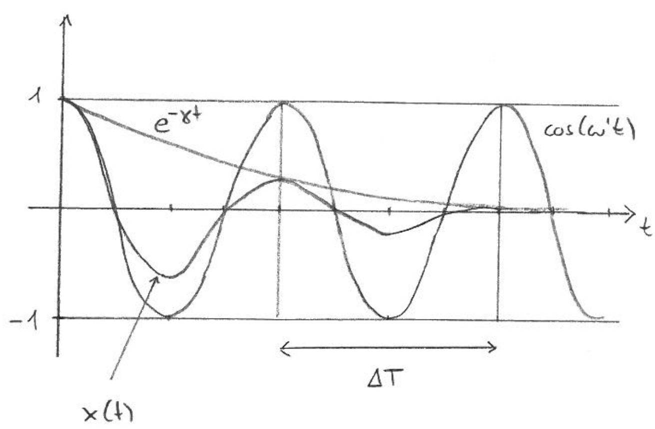
$x(t)$ ist reell
$\rightarrow$ physikalische Lösung

$\hookrightarrow$ beschreibt eine gedämpfte Schwingung mit Frequenz ω'

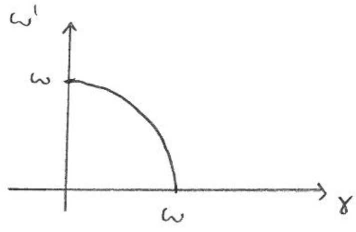
$\hat{=}$ Periode $\Delta T = \frac{2\pi}{\omega'} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2-\gamma^2}}$

speziell für $a = 1$, $b = 0$

$\rightarrow \quad x(t) = e^{-\gamma t}\cos(\omega' t)$



ω' als Funktion von γ:



d.h.: für $\gamma \to \omega$ geht ω' gegen Null und die Periode $\Delta T \to \infty$

2. $\gamma = \omega$ (aperiodischer Grenzfall)

$$\alpha_1 = \alpha_2 = -\gamma$$

$\longrightarrow$ Lösung der Dgl: $\quad x_1(t) = a_1 e^{-\gamma t} \qquad a_1 \in \mathbb{R}$

zu beachten: für $\alpha_1 = \alpha_2$ existiert eine weitere Lösung

$$x_2(t) = a_2 \, t \, e^{-\gamma t} \qquad \text{(siehe Übungen)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x(t) = (a_1 + a_2 t)\, e^{-\gamma t}}$$

3. $\gamma > \omega$ (starke Dämpfung)

$$\alpha_{1/2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$$

$\longrightarrow$ Lösungen der Dgl:

$$x_1(t) = a_1 e^{-\gamma t} e^{\sqrt{\gamma^2-\omega^2}\, t}$$

$$x_2(t) = a_2 e^{-\gamma t} e^{-\sqrt{\gamma^2-\omega^2}\, t}$$

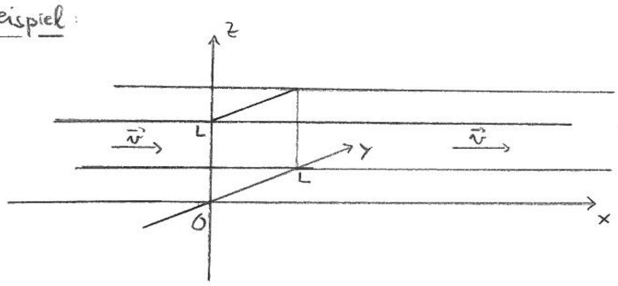
$$\Rightarrow \quad \boxed{x(t) = e^{-\gamma t}\left(a_1 e^{\sqrt{\gamma^2-\omega^2}\, t} + a_2 e^{-\sqrt{\gamma^2-\omega^2}\, t}\right)}$$

I. komplexe Zahlen

5. Strömungsfeld

Beschreibung einer strömenden Flüssigkeit durch ein $\underbrace{\text{Vektorfeld } \vec{v}(\vec{r})}_{\text{Geschwindigkeitsfeld, Strömungsfeld}}$

Beispiel:



in diesem Volumen strömt eine Flüssigkeit mit konstanter Geschwindigkeit

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \quad \vec{v}(\vec{r}) = \begin{cases} \vec{v} & : \quad 0 < y < L \,, \quad 0 < z < L \\ \vec{0} & : \quad \text{sonst} \end{cases}$$

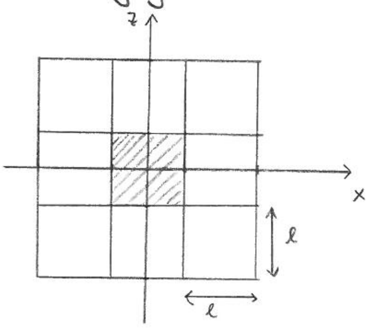
in diesem Kapitel : Wie lässt sich das Strömungsfeld charakterisieren?

$\rightarrow$ Quellen und Wirbel

zunächst: Übergang kontinuierliche Beschreibung $\rightarrow$ diskrete Beschreibung

d.h.: Beschreibung der Strömung durch sich bewegende Punktmassen

$\rightarrow$ Zerlegung des Raums in Würfel mit Kantenlänge ℓ $\rightarrow$ Volumen $V = \ell^3$

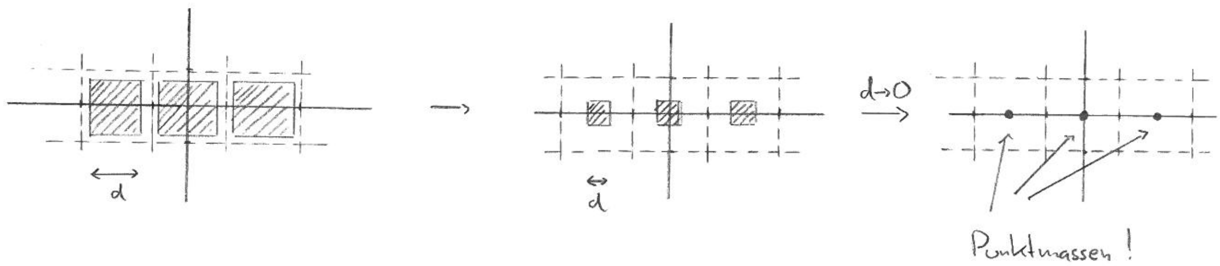


jeder Würfel enthält die Masse $m = \rho_0 \ell^3$

Annahme : die Massendichte $\rho(\vec{r})$ ist konstant

$$\rho(\vec{r}) = \rho_0$$

jetzt: die Kantenlänge dieser Würfel wird verkleinert:



betrachte die Dichte $\rho_d(\vec{r})$ des Würfels bei $\vec{r} = \vec{0}$:

$$\rho_d(\vec{r}) = \begin{cases} \bar{\rho}(d) & : \quad -\frac{d}{2} \leq x \leq \frac{d}{2} \,, \quad -\frac{d}{2} \leq y \leq \frac{d}{2} \,, \quad -\frac{d}{2} \leq z \leq \frac{d}{2} \\ 0 & : \quad \text{sonst} \end{cases}$$

$\bar{\rho}(d)$ folgt aus $\quad \bar{\rho}(d) \cdot d^3 \overset{!}{=} m = \rho_0 \ell^3$

$$\Rightarrow \quad \bar{\rho}(d) = \frac{m}{d^3} \quad ; \quad \bar{\rho}(d) \rightarrow \infty \quad \text{für } d \rightarrow 0$$

im Limes $d \rightarrow 0$ gilt: $\quad \boxed{\lim_{d \rightarrow 0} \rho_d(\vec{r}) = m\,\delta(\vec{r})}$ $\qquad \delta(\vec{r})$: δ-Funktion

J. δ-Funktion

$\Rightarrow$ die Massendichte einer einzelnen Punktmasse am Ort $\vec{r} = \vec{0}$:

$$\rho(\vec{r}) = m\,\delta(\vec{r})$$

Gesamtmasse einer Massenveteilung $\rho(\vec{r})$: $\boxed{M = \int d^3r\, \rho(\vec{r})}$

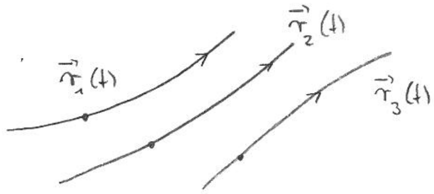
$\rightarrow$ falls $\rho(\vec{r}) = \begin{cases} \rho_0 & : \text{ innerhalb eines Volumens } V \\ 0 & : \text{ sonst} \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad M = \int d^3r\, \rho_0 = \rho_0 V$$

$\rightarrow$ falls $\rho(\vec{r}) = m\,\delta(\vec{r}) \quad \Rightarrow \quad M = m \underbrace{\int d^3r\, \delta(\vec{r})}_{=1} = m$

<u>Massendichte von bewegten Punktmassen</u>

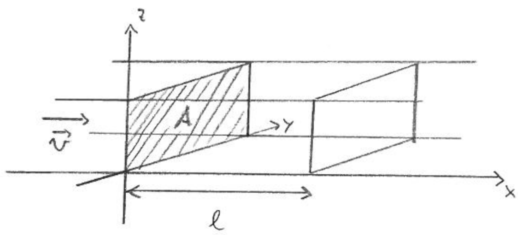
$$\boxed{\rho(\vec{r},t) = \sum_{i=1}^{N} m_i\, \delta(\vec{r} - \vec{r}_i(t))}$$



$\rightarrow$ N Punktmassen m_i, mit den Bahnen $\vec{r}_i(t)$

<u>zurück zur Kontinuumsbeschreibung</u>

betrachte die folgende Geometrie :



$\vec{v} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

<u>Definition:</u> Fluss durch die Fläche A

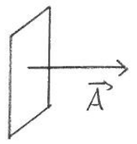
$$\boxed{\Phi = \frac{M}{\Delta t}}$$

M : Masse, die im Zeitintervall Δt durch die Fläche A fließt = Masse im Volumen $V = A\ell$ mit $\ell = v \cdot \Delta t$

$\rightarrow \quad M = \rho \cdot V = \rho A v \Delta t \qquad \Rightarrow \quad \boxed{\Phi = \rho A v} \quad (*)$

<u>jetzt</u>: Verallgemeinerung von Gl. $(*)$ auf beliebige Flächen und beliebige Strömungsfelder $\vec{v}(\vec{r})$; außerdem $\rho \rightarrow \rho(\vec{r})$

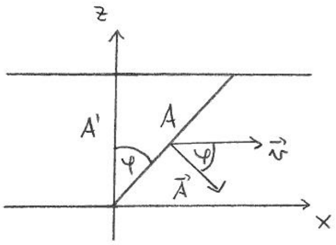
<u>Zunächst</u>: Definition des Normalenvektors einer Fläche



$\vec{A}$ steht $\perp$ auf der Fläche

$|\vec{A}|$ = Flächeninhalt A

Fluss durch die Fläche für den Fall $\vec{A}$ nicht $\parallel$ zu $\vec{v}$:

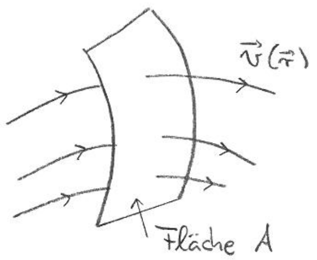


hier: $\Phi = \rho A' v$

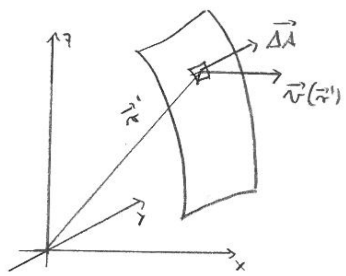
es gilt: $\vec{A} \cdot \vec{v} = v \underbrace{A \cos\varphi}_{= A'}$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\Phi = \rho \vec{A} \cdot \vec{v}}$$

<u>allgemein</u>:



d.h. $\vec{A} \cdot \vec{v}$ ist auf der Fläche nicht konstant



$\Rightarrow$ betrachte ein kleines Flächenelement ΔA am Ort $\vec{r}\,'$

$\rightarrow$ Fluss durch ΔA: $\quad \Delta\Phi = \rho(\vec{r}\,') \, \Delta\vec{A} \cdot \vec{v}(\vec{r}\,')$

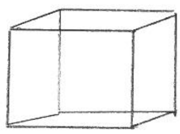
<u>Definition</u>: Stromdichte $\boxed{\vec{j}(\vec{r}) = \rho(\vec{r}) \, \vec{v}(\vec{r})}$

$$\Rightarrow \quad \Delta\Phi = \vec{j}(\vec{r}\,') \cdot \Delta\vec{A}$$

der gesamte Fluss Φ durch die Fläche A ergibt sich als Flächenintegral:

$$\boxed{\Phi = \int_A \vec{j}(\vec{r}) \cdot d\vec{A}}$$

jetzt: Strömungsbilanz für ein Volumen V mit geschlossener Oberfläche A



→ berechne den Fluss durch die gesamte Oberfläche

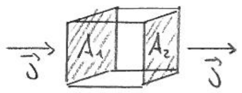
$$\Phi = \oint_A \vec{j}(\vec{r}) \cdot \vec{dA}$$

↳ Flächenintegral über eine geschlossene Fläche

was bedeutet $\Phi = 0$?

→ die im Volumen enthaltene Masse bleibt erhalten ($\rightsquigarrow \Phi = \frac{M}{\Delta t}$)

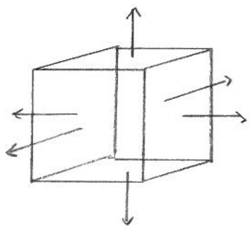
z.B.:



Fluss durch Fläche A_1: $\Phi_{A_1} = -\Phi_{A_2}$

$\Phi > 0$:

z.B.:



→ die im Volumen enthaltene Masse nimmt ab

oder:

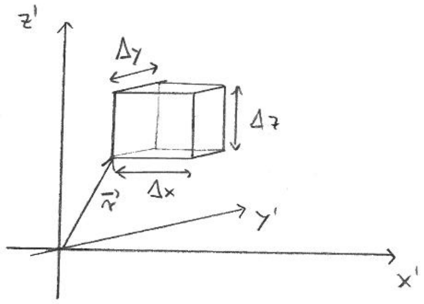
das Volumen ist eine Quelle für das Strömungsfeld

$\Phi < 0$: analog → das Volumen ist eine Senke für das Strömungsfeld

lokale Quellstärke (Divergenz)

betrachte ein „kleines" Volumen ΔV mit geschlossener Oberfläche ΔA

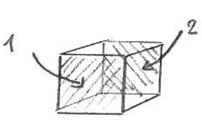
wähle ΔV als Quader:



$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

→ berechne das Flächenintegral $\underbrace{\oint_{\Delta A} \vec{j}(\vec{r}\,') \cdot \vec{dA}}$

= Summe aus sechs Teilflächen



Vorderseite : $\int_1 \vec{j}(\vec{r}\,') \cdot d\vec{A} = \int_x^{x+\Delta x} \int_z^{z+\Delta z} \vec{j}(x', y, z') \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -dx'dz' \\ 0 \end{pmatrix}$ ($d\vec{A}$ zeigt in $(-y)$ - Richtung)

$$= - \int_x^{x+\Delta x} dx' \int_z^{z+\Delta z} dz' \; j_y(x', y, z')$$

Hinterseite : $\int_2 \vec{j}(\vec{r}\,') \cdot d\vec{A} = + \int_x^{x+\Delta x} dx' \int_z^{z+\Delta z} dz' \; j_y(x', y+\Delta y, z')$ ($d\vec{A}$ zeigt in $(+y)$ - Richtung)

<u>bilde</u> $\lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \left[\int_1 \ldots + \int_2 \ldots \right] = \ldots$ $\qquad \Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$

$$\ldots = \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \lim_{\Delta z \to 0} \frac{1}{\Delta x \Delta z} \int_x^{x+\Delta x} dx' \int_z^{z+\Delta z} dz' \underbrace{\lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{\Delta y} \left[j_y(x', y+\Delta y, z') - j_y(x', y, z') \right]}_{= \frac{\partial}{\partial y} j_y(x', y, z')}}_{= \Delta x \Delta z \frac{\partial}{\partial y} j_y(x, y, z)} = \ldots$$

$$\ldots = \frac{\partial j_y}{\partial y}$$

damit ergibt sich für die gesamte Strömungsbilanz

$$\boxed{\lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_{\Delta A} \vec{j}(\vec{r}\,') \cdot d\vec{A} = \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} = \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r})}$$

$\vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r})$: Divergenz des Vektorfelds $\vec{j}(\vec{r})$

$\Phi(\vec{r}, \Delta V) = \oint_{\Delta A} \vec{j}(\vec{r}\,') \cdot d\vec{A}$: Fluss aus dem Quader ΔV am Ort $\vec{r}$

lokale Quellstärke : $\lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Phi(\vec{r}, \Delta V)}{\Delta V} \;\hat{=}\;$ Divergenz $\vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r})$

L. Divergenz und Rotation