Übungsaufgaben zur Vorlesung

Mathematische Methoden für das Lehramt (Ba of Arts)

apl. Prof. Dr. R. Bulla

WS 2018/19

Blatt 14: Abgabetermin: Mittwoch, der 30.01.2019, 10:00

Aufgabe 1: Additionstheorem

(2 Punkte)

Stellen Sie mit Hilfe der Eulerschen Formel $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi$ ein Additionstheorem für $\sin(3\varphi)$ auf, d.h. stellen Sie $\sin(3\varphi)$ durch eine Kombination aus $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$ dar.

Aufgabe 2: δ-Funktion – Funktionenfolgen

(6 Punkte)

Die δ-Funktion lässt sich definieren als Limes einer Funktionenfolge $f_n(x)$:

$$\delta(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \ , \quad \text{mit} \quad f_n(x) = \begin{cases} n & : \ |x| < \frac{1}{2n} \ , \\ 0 & : \ \text{sonst} \ . \end{cases}$$

Im Folgenden soll die Gültigkeit einiger Rechenregeln für die δ-Funktion in dieser Darstellung und für die Funktion $g(x) = a + bx^2$, mit $a, b \in \mathbb{R}$ gezeigt werden.

a) Zeigen Sie, durch explizite Berechnung der Integrale $\int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_n(x) \mathrm{d}x$ und anschließender Limesbildung ($\lim_{n\to\infty}$), dass gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\delta(x)\,\mathrm{d}x = g(0) \ . \tag{1}$$

(2 Punkte)

b) Zeigen Sie analog, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\delta(\alpha x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{|\alpha|} g(0) \ , \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \ . \tag{2}$$

(2 Punkte)

c) Zeigen Sie (ebenfalls analog), dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\delta(x - x_0)\,\mathrm{d}x = g(x_0) \ . \tag{3}$$

(2 Punkte)

Aufgabe 3: δ-Funktion

(6 Punkte)

Für Integrale über die δ-Funktion gelten die folgenden Rechenregeln (siehe auch Aufgabe 2):

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\delta(x)\,\mathrm{d}x &= \psi(0)\ , \\
\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\delta(\alpha x)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{|\alpha|}\psi(0)\ , \quad \alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\ , \\
\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\delta(x-x_0)\,\mathrm{d}x &= \psi(x_0)\ .
\end{aligned}$$

Dabei ist $\psi(x)$ eine beliebige Funktion. Berechnen Sie mit Hilfe dieser Rechenregeln die folgenden Integrale:

a)
$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(x)\delta(x-\pi)\,\mathrm{d}x\ , \quad \text{(1 Punkt)}$$

b)
$$\int_{-1}^{3} e^{2x}\delta(2x)\,\mathrm{d}x\ , \quad \text{(1 Punkt)}$$

c)
$$\int_{-\infty}^{\infty} (x+x^2)\,[\delta(1-x)+\delta(2+x)]\mathrm{d}x\ , \quad \text{(2 Punkte)}$$

d)
$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{0}^{4} \delta(x-n+1/2)\mathrm{d}x\ , \quad \text{(2 Punkte)}$$

Aufgabe 4: Schwerpunkt einer Massenverteilung

(5 Punkte)

Der Schwerpunkt $\vec{R}$ einer Massenverteilung $\rho(\vec{r})$ ist definiert als

$$\vec{R} = \frac{1}{M}\int \mathrm{d}^3r\,\vec{r}\rho(\vec{r})\ , \quad \text{mit } M = \int \mathrm{d}^3r\,\rho(\vec{r})\ .$$

Berechnen Sie den Schwerpunkt für

a) eine konstante Massendichte ρ_0 in einem Würfel mit Kantenlänge L:

$$\rho(\vec{r}) = \begin{cases} \rho_0 & : \ 0 \le x \le L\ , 0 \le y \le L\ , 0 \le z \le L\ , \\ 0 & : \ \text{sonst}\ , \end{cases} \qquad \text{(2 Punkte)}$$

b) und für eine diskrete Massenverteilung:

$$\rho(\vec{r}) = \sum_{n=1}^{4} m\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_n)\ , \ \text{mit } \vec{r}_n = \begin{pmatrix} n \\ 1+n \\ n^2 \end{pmatrix}\ . \qquad \text{(3 Punkte)}$$