

Mathematische Methoden für das Lehramt (Ba of Arts)

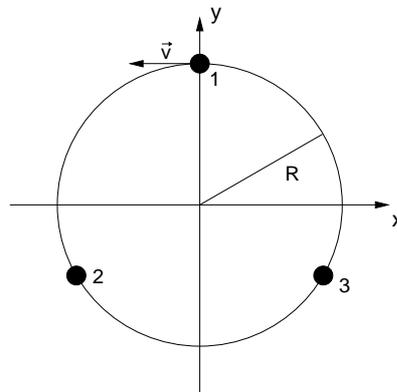
apl. Prof. Dr. R. Bulla

WS 2020/21

Blatt 4: Abgabetermin: Montag, der 30.11.2020, 16:00

Aufgabe 1: Drei-Körper-Problem

(8 Punkte)



Betrachten Sie das in der Abbildung dargestellte Drei-Körper-Problem, bei dem sich drei Körper mit Massen $m_i = m$ auf einer Kreisbahn mit Radius R um den Ursprung bewegen. Der Betrag der Geschwindigkeiten ist für alle Körper konstant, $|\vec{v}_i(t)| = v$, die drei Körper liegen damit immer auf den Ecken eines rotierenden gleichseitigen Dreiecks.

- a) Geben Sie die Bahnen $\vec{r}_i(t)$ der drei Körper an. Hinweis: Die Abbildung zeigt die Positionen zur Zeit $t = 0$. (3 Punkte)
- b) Bestimmen Sie für die in der Abbildung dargestellte Geometrie die Kraft \vec{F} auf den Körper 1 aufgrund der Gravitationskraft, die durch die beiden anderen Körper auf diesen ausgeübt wird. Dabei ist die Gravitationskraft gegeben durch:

$$\vec{F}_{ij} = -Gm_i m_j \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3} .$$

(3 Punkte)

- c) Wie groß muss v sein, damit der Körper 1 auf der Kreisbahn mit Radius R bleibt? (2 Punkte)

Aufgabe 2: Teilchenbahnen in Polarkoordinaten

(3 Punkte)

Skizzieren Sie die folgenden durch die Polarkoordinaten $r(t)$ und $\varphi(t)$ gegebenen Teilchenbahnen in der x - y -Ebene:

a) $r(t) = 2t$, $\varphi(t) = \frac{\pi}{2}$, $0 \leq t \leq 1$.

b) $r(t) = 1$, $\varphi(t) = t^2$, $\sqrt{\pi} \leq t \leq \sqrt{2\pi}$.

c) $r(t) = \frac{1}{2}t^2$, $\varphi(t) = \frac{3\pi}{2}$, $0 \leq t \leq 2$.

Aufgabe 3: Integration

(5 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale:

$$\int_e^{e^2} \frac{1}{x} dx ,$$
$$\int_0^1 \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right) dx ,$$
$$\int_0^1 (e^x + e^{2x}) dx ,$$
$$\int_{-1}^1 \left(\sum_{n=1}^N x^n\right) dx ,$$
$$\int_0^{2\pi} \sin(x) \cos(x) dx .$$

Hinweis zur Bestimmung der Stammfunktion von $\sin(x) \cos(x)$: Betrachten Sie die Ableitung von $\sin^2(x)$.