

Mathematische Methoden für das Lehramt (Ba of Arts)

apl. Prof. Dr. R. Bulla

WS 2020/21

Blatt 5: Abgabetermin: Montag, der 07.12.2020, 16:00

Aufgabe 1: Newtonsche Dynamik

(6 Punkte)

Ein Körper der Masse m befindet sich zur Zeit $t = 0$ am Ort $\vec{r}(0) = \vec{0}$; für die Geschwindigkeit gilt $\vec{v}(0) = \vec{0}$. Auf den Körper wirkt die folgende zeitabhängige Kraft $\vec{F}(t)$:

$$\vec{F}(t) = \begin{cases} f\vec{e}_x & : 0 < t \leq 1, \\ \vec{0} & : 1 < t \leq 2, \\ f\vec{e}_y & : 2 < t \leq 3, \\ \vec{0} & : t > 3. \end{cases}$$

($f > 0$; \vec{e}_x und \vec{e}_y sind die Einheitsvektoren in x bzw. y -Richtung.) Berechnen Sie $\vec{r}(t)$ und $\vec{v}(t)$ für alle $t > 0$.

Aufgabe 2: Integration

(5 Punkte)

a) Berechnen Sie folgende Integrale:

$$\int_1^2 \frac{\sqrt{x}}{x^3} dx, \quad \int_0^{(\ln a)^{-1}} a^x dx. \quad (2 \text{ Punkte})$$

b) Bestimmen Sie die Stammfunktion für

$$f(x) = \sum_{n=0}^m (n+1)! x^n. \quad (1 \text{ Punkt})$$

c) Die folgenden Integrale ergeben jeweils eine Funktion, die von dem Parameter x abhängt. Bestimmen Sie die Funktionen $f_i(x)$.

$$f_1(x) = \int_0^1 e^{-xy} dy, \quad f_2(x) = \int_{-x}^{2x} ((x')^2 + (x')^3) dx'. \quad (2 \text{ Punkte})$$

Aufgabe 3: partielle Integration

(6 Punkte)

Zu berechnen sind die bestimmten Integrale

$$I_m = \int_0^\pi x^m \sin(x) dx .$$

- a) Leiten Sie zunächst durch zweifache partielle Integration die folgende Rekursionsformel für die I_m her:

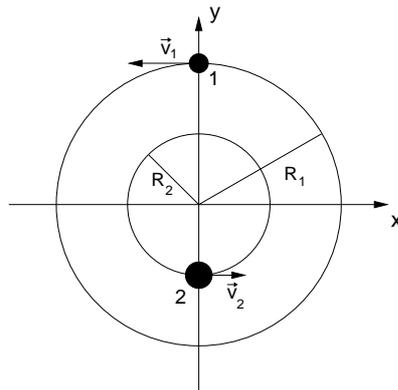
$$I_m = \pi^m - m(m-1)I_{m-2} .$$

(4 Punkte)

- b) Berechnen Sie damit die Integrale I_m für $m = 2, 4$ und 6 . (2 Punkte)

Aufgabe 4: Zwei-Körper-Problem

(4 Punkte)



Betrachten Sie das in der Abbildung dargestellte Zwei-Körper-Problem, bei dem sich zwei Körper mit Massen m_1 und $m_2 = 2m_1$ auf Kreisbahnen mit Radien R_1 und R_2 um den Ursprung bewegen. Der Schwerpunkt des Zwei-Körper-Systems befindet sich für alle Zeiten bei $\vec{R}_s = \vec{0}$. Der Betrag der Geschwindigkeiten ist für die beiden Körper jeweils konstant, $|\vec{v}_i(t)| = v_i$.

- a) Bestimmen Sie aus diesen Angaben die Verhältnisse R_1/R_2 und v_1/v_2 . (2 Punkte)
- b) Bestimmen Sie für die in der Abbildung dargestellte Geometrie die Kräfte \vec{F}_{12} und \vec{F}_{21} aufgrund der Gravitationskraft, die die beiden Körper aufeinander ausüben. (2 Punkte)