Übungsaufgaben zur Vorlesung

Mathematische Methoden für das Lehramt (Ba of Arts)

Priv.-Doz. Dr. R. Bulla

WS 2015/16

Blatt 10: Abgabetermin: Mittwoch, der 13.01.2016, 10:00

Aufgabe 1: Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

(8 Punkte)

Gegeben sei folgende Differentialgleichung:

$$4\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 2\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - 2x(t) = 0 \ . \tag{1}$$

a) Geben Sie einen geeigneten Ansatz für die Lösung dieser Differentialgleichung an. Auf welche algebraische Gleichung reduziert sich damit die Differentialgleichung? (2 Punkte)

b) Lösen Sie diese algebraische Gleichung und konstruieren Sie daraus die allgemeine Lösung der Differentialgleichung. (2 Punkte)

c) Wie lautet die Lösung der Differentialgleichung für die Anfangsbedingungen $x(0) = 0$ und $\dot{x}(0) = 1$? (1 Punkt)

Die Differentialgleichung wird nun um einen Term erweitert:

$$4\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 2\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - 2x(t) = ae^{\omega t} \ . \tag{2}$$

d) Zeigen Sie, dass die spezielle Lösung

$$x_{\mathrm{s}}(t) = \frac{a}{4\omega^2 + 2\omega - 2}e^{\omega t}$$

eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (2) ist. (2 Punkte)

e) Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (2) ergibt sich aus der Summe der speziellen Lösung $x_{\mathrm{s}}(t)$ und der allgemeinen Lösung der entsprechenden homogenen Differentialgleichung (1). Zeigen Sie, dass diese Summe, also

$$x(t) = x_{\mathrm{s}}(t) + a_1e^{t/2} + a_2e^{-t} \ ,$$

eine Lösung der Differentialgleichung (2) ist. (1 Punkt)

Aufgabe 2: Differentialgleichungen – Anfangsbedingungen

(8 Punkte)

Die Newtonsche Bewegungsgleichung $kx(t) = m\ddot{x}(t)$ $(k > 0)$ hat die allgemeine Lösung

$$x(t) = ae^{\lambda t} + be^{-\lambda t} \ , \ \lambda = \sqrt{\frac{k}{m}} \ , \ a, b \in \mathbb{R} \ .$$

Die Anfangsbedingungen sind gegeben durch $x(0) = x_0$ und $\dot{x}(0) = v_0$.

a) Geben Sie a und b (und damit $x(t)$) in Abhängigkeit von x_0 und v_0 an. (1 Punkt)

b) Im folgenden wird $x_0 = 1$ gesetzt. Für welche Werte von v_0 gilt $\lim_{t\to\infty} x(t) = -\infty$, 0 bzw. ∞? (2 Punkte)

c) Skizzieren Sie die Bahn $x(t)$ für $v_0 = -2\lambda, -\lambda, 0$. (2 Punkte)

d) Berechnen Sie die Zeitabhängigkeit von kinetischer und potentieller Energie für $x_0 = 1$ und beliebige v_0. Zeigen Sie für diesen Fall, dass die Gesamtenergie $E = T + V$ eine Erhaltungsgröße ist. (3 Punkte)

Aufgabe 3: Differentialgleichung erster Ordnung mit nicht-konstanten Koeffizienten

(4 Punkte)

Gegeben sei eine Differentialgleichung erster Ordnung in der allgemeinen Form:

$$y'(x) + \frac{p(x)}{q(y)} = 0 \ .$$

a) Leiten Sie mit Hilfe der Separation der Variablen die folgende (implizite) Form für die Lösung $y(x)$ her:

$$Q(y) = -P(x) + c \quad , \quad c \in \mathbb{R} \ .$$

Dabei ist $Q(y)$ eine Stammfunktion zu $q(y)$ und $P(x)$ eine Stammfunktion zu $p(x)$. (2 Punkte)

b) Betrachten Sie jetzt die Differentialgleichung

$$y'(x) + \frac{x^2}{y} = 0 \ .$$

Berechnen Sie mit Hilfe des Lösungswegs aus Teilaufgabe a) die Lösungen $y(x)$. (2 Punkte)