Übungsaufgaben zur Vorlesung

Mathematische Methoden für das Lehramt (Ba of Arts)

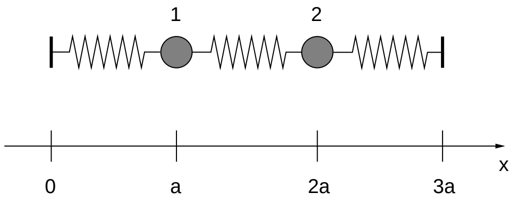
Priv.-Doz. Dr. R. Bulla

WS 2015/16

Blatt 11: Abgabetermin: Mittwoch, der 20.01.2016, 10:00

Aufgabe 1: zwei gekoppelte Oszillatoren

(6 Punkte)



Betrachten Sie das in der Abbildung dargestellte eindimensionale System aus 2 Körpern (jeweils mit Masse m), die über Federn (jeweils mit Federkonstante k) untereinander und mit den Aufhängepunkten bei $x = 0$ und $x = 3a$ verbunden sind. Die Ruhelagen der Körper sind gegeben durch $x_{n,0} = na$ $(n = 1, 2)$ und die Auslenkungen aus den Ruhelagen durch $\xi_n = x_n - x_{n,0}$.

a) Zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichungen für die Auslenkungen $\xi_1(t)$ und $\xi_2(t)$ gegeben sind durch

$$\begin{aligned} m\ddot{\xi}_1(t) &= -2k\xi_1(t) + k\xi_2(t) \ , \\ m\ddot{\xi}_2(t) &= k\xi_1(t) - 2k\xi_2(t) \ . \qquad \text{(2 Punkte)} \end{aligned}$$

Dieses System zweier gekoppelter Differentialgleichungen hat die folgende allgemeine Lösung ($\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$, $\omega_1 = \sqrt{3k/m}$, $\omega_2 = \sqrt{k/m}$):

$$\begin{pmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \end{pmatrix} = (\alpha_1 \cos(\omega_1 t) + \beta_1 \sin(\omega_1 t)) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + (\alpha_2 \cos(\omega_2 t) + \beta_2 \sin(\omega_2 t)) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) Zeigen Sie, dass diese Auslenkungen die gekoppelten Differentialgleichungen lösen. (2 Punkte)

c) Berechnen Sie die Bahnen der beiden Körper, also $x_1(t)$ und $x_2(t)$, für die Anfangsbedingungen

$$x_1(t=0) = \frac{3}{2}a \ , \quad x_2(t=0) = 2a \ , \quad \dot{x}_1(t=0) = 0 \ , \quad \dot{x}_2(t=0) = 0 \ .$$

(2 Punkte)

Aufgabe 2: eindimensionale Bewegung

(8 Punkte)

Gegeben sei das folgende eindimensionale Potential:

$$V(x) = \begin{cases} \sin^2(x) & : \quad |x| \leq \pi/2 \;, \\ 1 & : \quad |x| > \pi/2 \;. \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie die Taylorentwicklung von $V(x)$ um $x = 0$ bis zur Ordnung x^2 und skizzieren Sie das resultierende $V_2(x)$ (zusammen mit dem Potential $V(x)$). (2 Punkte)

b) Für welche x-Werte liegt eine Ruhelage vor? (2 Punkte)

c) Für welche Werte der Gesamtenergie E liegt eine gebundene bzw. ungebundene Bewegung vor? (2 Punkte)

d) Skizzieren Sie die Bahnen $x(t)$ für folgende Anfangsbedingungen:

$$\begin{aligned} 1: &\quad x(t=0) = -2 \;, v(t=0) = 1 \;, \\ 2: &\quad x(t=0) = -1 \;, v(t=0) = 0 \;. \end{aligned} \qquad \text{(2 Punkte)}$$

Aufgabe 3: Taylorentwicklung I

(9 Punkte)

Bestimmen Sie die Taylorreihe folgender Funktionen (jeweils um den Punkt $x = 0$):

a) $f(x) = a^x$, $(a > 0)$ (2 Punkte)

b) $f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$, (3 Punkte)

c) $f(x) = \sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$, (2 Punkte)

d) $f(x) = \cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$. (2 Punkte)

Aufgabe 4: Taylorentwicklung II

(5 Punkte)

a) Bestimmen Sie die Taylorentwicklung der Funktion $f(x) = \exp(-x^2)$ um $x = 0$ bis zur Ordnung x^4 (explizit durch Berechnung der Ableitungen $f^{(n)}(x = 0)$). (2 Punkte)

b) Die Taylorreihe von $\exp(-x^2)$ lässt sich auch über die bekannte Taylorreihe der Funktion $g(y) = \exp(y)$ bestimmen: $f_{\mathrm{T}}(x) = g_{\mathrm{T}}(-x^2)$. Was ergibt sich damit für die vollständige Taylorreihe? (3 Punkte)