

Mathematische Methoden für das Lehramt (Ba of Arts)

Priv.-Doz. Dr. R. Bulla

WS 2015/16

Blatt 13: Abgabetermin: Mittwoch, der 03.02.2016, 10:00

Aufgabe 1: komplexe Zahlen – $e^{i\varphi}$

(6 Punkte)

Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil der komplexen Zahlen

a) $2e^{-i\pi/4}$, b) $ie^{\pi i}$, c) $e^{n\pi i}$ ($n \in \mathbb{Z}$) .

Schreiben Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $z = re^{i\varphi}$:

d) $2 - 2i$, e) $(-1)^n$ ($n \in \mathbb{Z}$) , f) $(1 + i)^n$ ($n \in \mathbb{Z}$) .

Aufgabe 2: Additionstheorem

(2 Punkte)

Stellen Sie mit Hilfe der Eulerschen Formel $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ ein Additionstheorem für $\sin(3\varphi)$ auf, d.h. stellen Sie $\sin(3\varphi)$ durch Kombinationen aus $\sin \varphi$ und $\cos \varphi$ dar.

Aufgabe 3: Taylorreihe für $\cos(x)$

(3 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Taylorreihe $f_T(x)$ für die Kosinus-Funktion $f(x) = \cos(x)$ gegeben ist durch

$$f_T(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} x^{2m} .$$

Aufgabe 4: δ -Funktion I

(6 Punkte)

Die δ -Funktion lässt sich definieren als

$$\delta(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) , \quad \text{mit } f_n(x) = \begin{cases} n & : |x| < \frac{1}{2n} , \\ 0 & : \text{sonst} . \end{cases}$$

Im Folgenden soll die Gültigkeit einiger Rechenregeln für die δ -Funktion in dieser Darstellung und für die Funktion $g(x) = a + bx$, mit $a, b \in \mathbb{R}$ gezeigt werden.

- a) Zeigen Sie, durch explizite Berechnung der Integrale $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_n(x)dx$ und anschließender Limesbildung ($\lim_{n \rightarrow \infty}$), dass gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\delta(x) dx = g(0) . \quad (1)$$

(2 Punkte)

- b) Zeigen Sie analog, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\delta(\alpha x) dx = \frac{1}{|\alpha|}g(0) , \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\} . \quad (2)$$

(2 Punkte)

- c) Zeigen Sie (ebenfalls analog), dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\delta(x - x_0) dx = g(x_0) . \quad (3)$$

(2 Punkte)

Aufgabe 5: δ -Funktion II

(6 Punkte)

Die Gleichungen (1), (2) und (3) aus Aufgabe 4 gelten nicht nur für das spezielle $g(x)$ aus dieser Aufgabe, sondern allgemein für beliebige Funktionen $\psi(x)$. Berechnen Sie mit Hilfe dieser Gleichungen die folgenden Integrale:

- a)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(x)\delta(x - \pi) dx , \quad (1 \text{ Punkt})$$

- b)

$$\int_{-1}^3 e^{2x}\delta(2x) dx , \quad (1 \text{ Punkt})$$

- c)

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x + x^2) [\delta(1 - x) + \delta(2 + x)] dx , \quad (2 \text{ Punkte})$$

- d)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^4 \delta(x - n + 1/2) dx , \quad (2 \text{ Punkte})$$