Übungsaufgaben zur Vorlesung

Mathematische Methoden für das Lehramt (Ba of Arts)

Priv.-Doz. Dr. R. Bulla

WS 2015/16

Blatt 14: Abgabetermin: Mittwoch, der 10.02.2016, 10:00

Aufgabe 1: Schwerpunkt einer Massenverteilung

(5 Punkte)

Der Schwerpunkt $\vec{R}$ einer Massenverteilung $\rho(\vec{r})$ ist definiert als

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \int \mathrm{d}^3 r \, \vec{r} \rho(\vec{r}) \ , \quad \text{mit } M = \int \mathrm{d}^3 r \, \rho(\vec{r}) \ .$$

Berechnen Sie den Schwerpunkt für

a) eine konstante Massendichte ρ_0 in einem Würfel mit Kantenlänge L:

$$\rho(\vec{r}) = \begin{cases} \rho_0 & : \ 0 \le x \le L \ , 0 \le y \le L \ , 0 \le z \le L \ , \\ 0 & : \ \text{sonst} \ , \end{cases} \qquad \text{(2 Punkte)}$$

b) und für eine diskrete Massenverteilung:

$$\rho(\vec{r}) = \sum_{n=1}^{4} m \, \delta(\vec{r} - \vec{r}_n) \ , \ \text{mit } \vec{r}_n = \begin{pmatrix} n \\ 1+n \\ n^2 \end{pmatrix} \ . \qquad \text{(3 Punkte)}$$

Aufgabe 2: Mehrfachintegrale

(8 Punkte)

Berechnen Sie die Dreifachintegrale

$$\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^1 \mathrm{d}z \, f_i(x,y,z) \ ,$$

für die folgenden Funktionen $f_i(x,y,z)$:

a) $f_1(x,y,z) = x^2 y e^z$, (2 Punkte)

b) $f_2(x,y,z) = (x+y)(z^2+x)$, (3 Punkte)

c) $f_3(x,y,z) = zy^2 e^{xyz}$. (3 Punkte)

Aufgabe 3: Divergenz

(6 Bonuspunkte)

Die Divergenz eines Vektorfelds $\vec{A}(\vec{r})$ ist definiert als

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\partial A_x(\vec{r})}{\partial x} + \frac{\partial A_y(\vec{r})}{\partial y} + \frac{\partial A_z(\vec{r})}{\partial z} \ , \ \text{mit } \vec{A}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} A_x(\vec{r}) \\ A_y(\vec{r}) \\ A_z(\vec{r}) \end{pmatrix} \ .$$

Berechnen Sie die Divergenz der Vektorfelder

a) $\vec{A}_1(\vec{r}) = \vec{r}$, (1 Punkt)

b) $\vec{A}_2(\vec{r}) = \vec{b} \times \vec{r}$, mit einem konstanten Vektor $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$. (2 Punkte)

c) Zeigen Sie die folgende Produktregel (dabei ist $\varphi(\vec{r})$ ein beliebiges skalares Feld):

$$\vec{\nabla} \cdot \Big(\varphi(\vec{r})\vec{A}(\vec{r})\Big) = \varphi(\vec{r})\,\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}) + \vec{A}(\vec{r}) \cdot \vec{\nabla}\varphi(\vec{r}) \ . \qquad \text{(3 Punkte)}$$

Aufgabe 4: Rotation

(4 Bonuspunkte)

Die Rotation eines Vektorfelds $\vec{A}(\vec{r})$ ist definiert als

$$\vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z(\vec{r})}{\partial y} - \frac{\partial A_y(\vec{r})}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x(\vec{r})}{\partial z} - \frac{\partial A_z(\vec{r})}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y(\vec{r})}{\partial x} - \frac{\partial A_x(\vec{r})}{\partial y} \end{pmatrix} \ .$$

Berechnen Sie die Rotation der Vektorfelder $\vec{A}_1(\vec{r})$ und $\vec{A}_2(\vec{r})$ aus Aufgabe 3.

Aufgabe 5: Gradientenfelder, Wirbelfelder

(6 Bonuspunkte)

a) Zeigen Sie, dass für beliebige skalare Felder $\varphi(\vec{r})$ gilt:

$$\vec{\nabla} \times \Big(\vec{\nabla}\varphi(\vec{r})\Big) = \vec{0} \ ,$$

d.h.: „Gradientenfelder sind wirbelfrei“. (3 Punkte)

b) Zeigen Sie, dass für beliebige Vektorfelder $\vec{A}(\vec{r})$ gilt:

$$\vec{\nabla} \cdot \Big(\vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r})\Big) = 0 \ ,$$

d.h.: „Wirbelfelder sind quellenfrei“. (3 Punkte)