Übungsaufgaben zur Vorlesung

Mathematische Methoden für das Lehramt (Ba of Arts)

Priv.-Doz. Dr. R. Bulla

WS 2015/16

Blatt 2: Abgabetermin: Mittwoch, der 04.12.2015, 10:00

Aufgabe 1: Kinematik von Massenpunkten

(10 Punkte)

Betrachten Sie die folgenden Bahnkurven für die Bewegung eines Massenpunkts in Dimension $d = 2$:

$$\vec{r}_1(t) = R\begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(2\omega t) \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{r}_2(t) = \begin{pmatrix} t\sin(\omega t) \\ t\cos(\omega t) \end{pmatrix} \quad .$$

a) Skizzieren Sie jeweils die Komponenten $x_i(t)$ und $y_i(t)$ $(i = 1, 2)$ sowie die Bahnen $\vec{r}_i(t)$ in der zweidimensionalen Ebene. (4 Punkte)

b) Berechnen Sie die Geschwindigkeiten $\vec{v}_i(t)$ und die Beschleunigungen $\vec{a}_i(t)$ sowie deren Beträge $v_i(t) = |\vec{v}_i(t)|$ und $a_i(t) = |\vec{a}_i(t)|$. (4 Punkte)

Betrachten Sie jetzt die folgende Bahn in Dimension $d = 3$:

$$\vec{r}_3(t) = \begin{pmatrix} R\cos(\omega t) \\ R\sin(\omega t) \\ \alpha t \end{pmatrix} \quad .$$

c) Skizzieren Sie diese dreidimensionale Bewegung. (2 Punkte)

Aufgabe 2: Vektoren I

(9 Punkte)

Gegeben sind die Vektoren

$$\vec{a} = 4\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 \quad , \quad \vec{b} = 3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 \quad ,$$

mit den Einheitsvektoren

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad .$$

Berechnen Sie:

a) $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$. (2 Punkte)

b) $\left|2\vec{a}-3\vec{b}\right|$. (1 Punkt)

c) $\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$. (1 Punkt)

d) Zeigen Sie, dass die Einheitsvektoren $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ und $\vec{e}_3$ paarweise senkrecht aufeinander stehen. (1 Punkt)

e) Zeigen Sie, dass die beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung $|\vec{a}\cdot\vec{b}| \leq |\vec{a}|\,|\vec{b}|$ erfüllen. (1 Punkt)

f) Zeigen Sie, dass die beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ die Dreiecksungleichung $|\vec{a}+\vec{b}| \leq |\vec{a}|+|\vec{b}|$ erfüllen. (1 Punkt)

g) Berechnen Sie

$$\sum_{i=1}^{3}\left[(\vec{a}\cdot\vec{e}_i)\vec{b}+(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{e}_i\right]$$

(2 Punkte)

Aufgabe 3: Vektoren II

(4 Punkte)

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke so weit wie möglich:

a) $2\alpha\vec{u}+\frac{1}{4\alpha}(2\vec{v}-8\alpha^2\vec{u})$ (2 Punkte)

b) $(\alpha+\beta)^2(\vec{u}+\vec{v})+(\alpha-\beta)^2(\vec{u}-\vec{v})+(\alpha^2+\beta^2)(\vec{v}-\vec{u})$ (2 Punkte)

Dabei sind $\vec{u}$ und $\vec{v}$ beliebige Vektoren und $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.