

**Mathematische Methoden für das Lehramt (Ba of Arts)**

Priv.-Doz. Dr. R. Bulla

WS 2015/16

**Blatt 3:** Abgabetermin: Mittwoch, der 11.11.2015, 10:00

**Aufgabe 1: Skalarprodukt**

(6 Punkte)

Für die (beliebigen) Vektoren  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  und  $\vec{w}$  sind die folgenden Skalarprodukte gegeben:

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = 1, \quad \vec{v} \cdot \vec{v} = 1, \quad \vec{w} \cdot \vec{w} = 4, \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{4}, \quad \vec{u} \cdot \vec{w} = 0, \quad \vec{v} \cdot \vec{w} = \frac{3}{4},$$

Berechnen Sie für die Vektoren

$$\vec{a} = \vec{u} + \vec{w}, \quad \vec{b} = 2\vec{v} - \vec{w}, \quad \vec{c} = -\vec{u} + 3\vec{v},$$

die Beträge  $|\vec{a}|$ ,  $|\vec{b}|$  und  $|\vec{c}|$ , sowie die Skalarprodukte  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ,  $\vec{a} \cdot \vec{c}$  und  $\vec{b} \cdot \vec{c}$ .

**Aufgabe 2: Vektorprodukt I**

(7 Punkte)

a) Zeigen Sie für beliebige Vektoren  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$  die Identität

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}.$$

(3 Punkte)

b) Zeigen Sie für beliebige Vektoren  $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$  die Identität

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2. \quad (1)$$

(3 Punkte)

c) Zeigen Sie, ausgehend von Gl. (1) und  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi$  die folgende Gleichung:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi.$$

(1 Punkt)

### Aufgabe 3: Vektorprodukt II

(5 Punkte)

Gegeben sind die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- a) Zeigen Sie anhand dieses Beispiels, dass für das Vektorprodukt das Assoziativgesetz i.A. nicht gilt, also

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}.$$

(2 Punkte)

- b) Berechnen Sie die Flächeninhalte der von den Vektorpaaren  $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ ,  $\{\vec{a}, \vec{c}\}$  und  $\{\vec{b}, \vec{c}\}$  aufgespannten Parallelelogramme. (3 Punkte)

### Aufgabe 4: Kronecker-Delta

(3 Punkte)

Das Kronecker-Delta ist definiert als

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & : i = j, \\ 0 & : i \neq j. \end{cases}$$

Berechnen Sie die folgenden Summen

$$\sum_{i=1}^3 a_i \delta_{i3}, \quad \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 b_i c_j \delta_{ij}, \quad \sum_{i=1}^3 (\delta_{ii} + \delta_{ij}).$$

Hinweis: In der dritten Summe nimmt  $j$  den Wert 1, 2 oder 3 an.

### Aufgabe 5: Teilchenbahnen in Polarkoordinaten

(6 Punkte)

Skizzieren Sie die folgenden, durch  $r(t)$  und  $\varphi(t)$  gegebenen Teilchenbahnen:

- a)  $r(t) = vt$ ,  $\varphi(t) = \frac{\pi}{2}$ .  
b)  $r(t) = R$ ,  $\varphi(t) = t^2$ .  
c)  $r(t) = \frac{1}{2}t^2$ ,  $\varphi(t) = \frac{3\pi}{2}$ .