Übungsaufgaben zur Vorlesung

Mathematische Methoden für das Lehramt (Ba of Arts)

Priv.-Doz. Dr. R. Bulla

WS 2015/16

Blatt 4: Abgabetermin: Mittwoch, der 18.11.2015, 10:00

Aufgabe 1: Teilchenbahnen in Kugelkoordinaten

(4 Punkte)

Skizzieren Sie die folgenden, durch $r(t)$, $\vartheta(t)$ und $\varphi(t)$ gegebenen Teilchenbahnen:

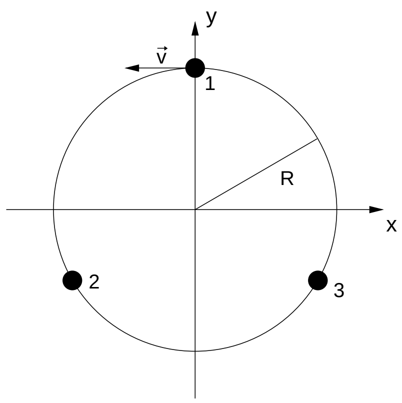
a) $r(t) = R$, $\vartheta(t) = t$, $\varphi(t) = \pi$, $0 \leq t \leq \pi$. (1 Punkt)

b) $r(t) = R$, $\vartheta(t) = \frac{\pi}{2}$, $\varphi(t) = t$, $0 \leq t \leq 2\pi$. (1 Punkt)

c) $r(t) = R$, $\vartheta(t) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\sin(t)$, $\varphi(t) = t$, $0 \leq t \leq 2\pi$. (2 Punkte)

Aufgabe 2: Drei-Körper-Problem

(6 Punkte)



Betrachten Sie das in der Abbildung dargestellte Drei-Körper-Problem, bei dem sich drei Körper mit Massen $m_i = m$ auf einer Kreisbahn mit Radius R um den Ursprung bewegen. Der Betrag der Geschwindigkeiten ist für alle Körper konstant, $|\vec{v}_i(t)| = v$, die drei Körper liegen damit immer auf den Ecken eines rotierenden gleichseitigen Dreiecks.

a) Geben Sie die Bahnen $\vec{r}_i(t)$ der drei Körper an. Hinweis: Die Abbildung zeigt die Positionen zur Zeit $t = 0$. (2 Punkte)

b) Bestimmen Sie für die in der Abbildung dargestellte Geometrie die Kraft $\vec{F}$ auf den Körper 1 aufgrund der Gravitationskraft, die durch die beiden anderen Körper auf diesen ausgeübt wird. Dabei ist die Gravitationskraft gegeben durch:

$$\vec{F}_{ij} = -Gm_i m_j \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3} \; .$$

(2 Punkte)

c) Wie groß muss v sein, damit der Körper 1 auf der Kreisbahn mit Radius R bleibt? (2 Punkte)

Aufgabe 3: Newtonsche Dynamik

(6 Punkte)

Ein Körper der Masse m befindet sich zur Zeit $t = 0$ am Ort $\vec{r}(0) = \vec{0}$; für die Geschwindigkeit gilt $\vec{v}(0) = \vec{0}$. Auf den Körper wirkt die folgende zeitabhängige Kraft $\vec{F}(t)$:

$$\vec{F}(t) = \begin{cases} f\vec{e}_x & : \; 0 < t \leq 1 \; , \\ f\vec{e}_y & : \; 1 < t \leq 2 \; , \\ -f\vec{e}_x & : \; 2 < t \leq 3 \; , \\ -f\vec{e}_y & : \; 3 < t \leq 4 \; , \\ \vec{0} & : \; t > 4 \; . \end{cases}$$

($f > 0$; $\vec{e}_x$ und $\vec{e}_y$ sind die Einheitsvektoren in x bzw. y-Richtung.) Berechnen Sie $\vec{r}(t)$ und $\vec{v}(t)$ und skizzieren Sie die Bahnkurven.

Aufgabe 4: Integration

(7 Punkte)

a) Zeigen Sie geometrisch, dass für die folgenden bestimmten Integrale gilt:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(x) \, \mathrm{d}x = 0 \; . \quad \text{(1 Punkt)}$$

$$\int_{0}^{2\pi} \sin^2(x) \, \mathrm{d}x = \pi \; . \quad \text{(1 Punkt)}$$

b) Berechnen Sie:

$$\int_{0}^{1} e^x \, \mathrm{d}x \; . \quad \text{(1 Punkt)}$$

$$\int_{-1}^{1} \left(\sum_{n=1}^{N} x^n \right) \mathrm{d}x \; . \quad \text{(2 Punkte)}$$

$$\int_{0}^{2\pi} \sin(x) \cos(x) \, \mathrm{d}x \; . \quad \text{(2 Punkte)}$$

Hinweis zur Bestimmung der Stammfunktion von $\sin(x)\cos(x)$: Betrachten Sie die Ableitung von $\sin^n(x)$.