Übungsaufgaben zur Vorlesung

Mathematische Methoden für das Lehramt (Ba of Arts)

Priv.-Doz. Dr. R. Bulla

WS 2015/16

Blatt 6: Abgabetermin: Mittwoch, der 02.12.2015, 10:00

Aufgabe 1: partielle Ableitungen

(6 Punkte)

Gegeben sei die Funktion:

$$g(x,y,z) = x^2 \sin(xz) + ze^y \ .$$

a) Berechnen Sie die folgenden partiellen Ableitungen:

$$\frac{\partial g}{\partial x} \ , \quad \frac{\partial g}{\partial y} \ , \quad \frac{\partial g}{\partial z} \ .$$

(3 Punkte)

b) Zeigen Sie explizit, dass die gemischten zweiten Ableitungen unabhängig von der Reihenfolge sind, in der die Ableitungen durchgeführt werden, also:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} \ , \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 g}{\partial z \partial x} \ , \quad \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 g}{\partial z \partial y} \ .$$

(3 Punkte)

Aufgabe 2: skalare Felder, Gradientenfelder

(8 Punkte)

Betrachten Sie die folgenden skalaren Felder $\varphi_i(\vec{r})$ $(i = 1, 2)$ mit $\vec{r} \in \mathbb{R}^2$:

$$\varphi_1(\vec{r}) = xy \ , \quad \varphi_2(\vec{r}) = \frac{y}{x^2+1} \ .$$

a) Skizzieren Sie die Höhenlinien der skalaren Felder $\varphi_i(\vec{r})$, also die Linien mit $\varphi(\vec{r}) = \varphi_n$, für eine sinnvolle Auswahl an φ_n. (4 Punkte)

b) Bestimmen Sie die Gradientenfelder $\vec{\nabla}\varphi_i(\vec{r})$. (2 Punkte)

c) Skizzieren Sie die Gradientenfelder $\vec{\nabla}\varphi_i(\vec{r})$, d.h. zeichnen Sie in einem zweidimensionalen Koordinatensystem die Vektoren $\vec{\nabla}\varphi_i(\vec{r}_n)$ für eine sinnvolle Auswahl an $\vec{r}_n$. (2 Punkte)

Aufgabe 3: Gradient

(6 Punkte)

Bestimmen Sie die Gradientenfelder der folgenden skalaren Felder:

a)
$$\varphi_1(\vec{r}) = \cos(x)\cos(y)\cos(z) \ .$$

b)
$$\varphi_2(\vec{r}) = r^n \ , \ \text{mit } r = |\vec{r}| \text{ und } n \in \mathbb{N} \ .$$

c)
$$\varphi_3(\vec{r}) = f(r) \ ,$$

mit einer beliebigen Funktion $f(r)$, die nur von $r = |\vec{r}|$ abhängt. Hinweis: der Ausdruck für das Gradientenfeld enthält die Ableitung $f'(r)$.

Aufgabe 4: Kraftfeld und Potential

(7 Punkte)

Gegeben sei das Potential $V(\vec{r})$ mit $\vec{r} \in \mathbb{R}^2$:

$$V(\vec{r}) = \cos(x) + \cos(y) \ .$$

a) Bestimmen Sie das Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(\vec{r})$. (1 Punkt)

b) Für welche $\vec{r} \in \mathbb{R}^2$ ist das Potential maximal bzw. minimal? (2 Punkte)

c) Für welche $\vec{r} \in \mathbb{R}^2$ gilt $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{0}$? (2 Punkte)

d) Im Limes $x \to 0$ gilt näherungsweise $\cos(x) \approx 1 - \frac{1}{2}x^2$. Führen Sie eine entsprechende Näherung im Potential durch und skizzieren Sie die Hohenlinien des genäherten Potentials $\tilde{V}(\vec{r})$. (2 Punkte)