Übungsaufgaben zur Vorlesung

Mathematische Methoden für das Lehramt (Ba of Arts)

Priv.-Doz. Dr. R. Bulla

WS 2015/16

Blatt 7: Abgabetermin: Mittwoch, der 09.12.2015, 10:00

Aufgabe 1: Produktregel für vektorwertige Funktionen

(4 Punkte)

Zeigen Sie, dass für die Ableitung des Skalarprodukts bzw. des Vektorprodukts zweier vektorwertiger Funktionen $\vec{a}(t)$ und $\vec{b}(t)$ (mit den Komponenten $a_i(t)$, $b_i(t)$, $i = x, y, z$) die folgenden Produktregeln gelten:

a)
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\vec{a}(t) \times \vec{b}(t)\Big) = \dot{\vec{a}}(t) \times \vec{b}(t) + \vec{a}(t) \times \dot{\vec{b}}(t) \ . \qquad \text{(2 Punkte)}$$

b)
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\vec{a}(t) \cdot \vec{b}(t)\Big) = \dot{\vec{a}}(t) \cdot \vec{b}(t) + \vec{a}(t) \cdot \dot{\vec{b}}(t) \ . \qquad \text{(2 Punkte)}$$

Aufgabe 2: skalare Felder, $\Delta\varphi$, $\vec{\nabla}\varphi(\vec{r})$

(4 Punkte)

Gegeben sei das skalare Feld $\varphi(\vec{r}) = xy$.

a) Berechnen Sie die Änderung des skalaren Feldes $\Delta\varphi = \varphi(\vec{r}_0 + \Delta\vec{r}) - \varphi(\vec{r}_0)$, für

$$\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \Delta\vec{r} = a\begin{pmatrix} \cos\vartheta \\ \sin\vartheta \end{pmatrix} \ , \ 0 \leq \vartheta < 2\pi \ .$$

Verwenden Sie dazu den Zusammenhang zwischen $\Delta\varphi$ und $\vec{\nabla}\varphi(\vec{r})$ (gültig im Limes $a \to 0$). (2 Punkte)

b) Skizzieren Sie $\Delta\varphi$ als Funktion von ϑ. Für welche Werte ϑ ist $\Delta\varphi$ maximal, minimal, bzw. $= 0$? Diskutieren Sie das Ergebnis bzgl. des Zusammenhangs zwischen $\vec{\nabla}\varphi(\vec{r})$ und den Höhenlinien von $\varphi(\vec{r})$. (2 Punkte)

Aufgabe 3: Potential des Schwerefelds

(2 Punkte)

Für das Schwerefeld der Erde gilt näherungsweise die folgende Form für das Kraftfeld:

$$\vec{F}(\vec{r}) = m\vec{g} \ , \ \text{mit} \ \ \vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} \ .$$

Wie lautet das entsprechende Potential?

Aufgabe 4: N-Teilchen-System – innere Kräfte

(3 Punkte)

Zeigen Sie, dass für ein N-Teilchen-System mit inneren Kräften $\vec{F}_{ij}$ zwischen Teilchen i und j gilt:

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1, j\neq i}^{N} \vec{F}_{ij} = \vec{0} \ .$$

Aufgabe 5: Drehimpulserhaltung

(4 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass für die Bewegung eines Teilchens auf der Kreisbahn

$$\vec{r}(t) = R \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

der Drehimpuls $\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$ eine Erhaltungsgröße ist. (2 Punkte)

b) Zeigen Sie, dass für eine beschleunigte Bewegung der Form

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(0) + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} t^2 \vec{g}$$

der Drehimpuls $\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$ *keine* Erhaltungsgröße ist. (2 Punkte)