Übungsaufgaben zur Vorlesung

Mathematische Methoden für das Lehramt (Ba of Arts)

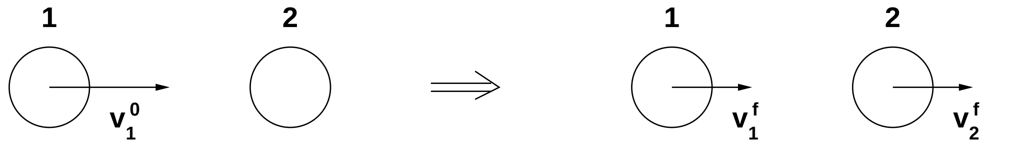
Priv.-Doz. Dr. R. Bulla

WS 2015/16

Blatt 8: Abgabetermin: Mittwoch, der 16.12.2015, 10:00

Aufgabe 1: elastischer Stoß

(7 Punkte)

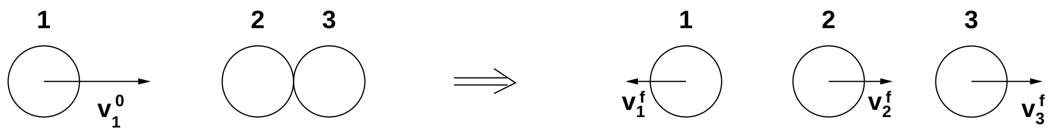


Betrachten Sie den in der Abbildung dargestellten Stoßprozess: Teilchen 1 (Masse m_1, Geschwindigkeit v_1^0) trifft auf das ruhende Teilchen 2 (Masse m_2, Geschwindigkeit $v_2^0 = 0$); nach dem Stoß haben die beiden Teilchen die Geschwindigkeiten v_1^{f} und v_2^{f}.

a) Berechnen Sie (unter der Annahme, dass Gesamtimpuls und Gesamtenergie des Systems erhalten sind) die Geschwindigkeiten v_1^{f} und v_2^{f}. (3 Punkte)

b) Was ergibt sich für den Fall $m_1 = m_2$? (2 Punkte)

Betrachten Sie jetzt den in der zweiten Abbildung dargestellten Stoßprozess mit drei Teilchen (Massen $m_i = m$, $v_2^0 = v_3^0 = 0$):



c) Zeigen Sie, dass die folgenden beiden Endzustände mit den Erhaltungssätzen verträglich sind:

$$\begin{aligned} \mathrm{I}: \quad & v_1^{\mathrm{f}} = v_2^{\mathrm{f}} = 0 \ , \ v_3^{\mathrm{f}} = v_1^0 \ , \\ \mathrm{II}: \quad & v_1^{\mathrm{f}} = -\frac{1}{3} v_1^0 \ , \ v_2^{\mathrm{f}} = v_3^{\mathrm{f}} = \frac{2}{3} v_1^0 \ . \end{aligned}$$ (2 Punkte)

Aufgabe 2: Drehimpuls

(3 Punkte)

Die Bahn eines Körpers sei gegeben durch $\vec{r}(t)$, der Drehimpuls $\vec{l}(t)$ werde relativ zum Bezugspunkt $\vec{r}_0 = \vec{0}$ bestimmt. Der Vektor $\vec{r}(t)$ überstreicht in der Zeit t die

Fläche $A(t)$. Zeigen Sie, dass für die Ableitung der Fläche nach der Zeit gilt:

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \frac{|\vec{l}(t)|}{2m} \ .$$

Aufgabe 3: zweidimensionales periodisches Potential

(7 Punkte)

Betrachten Sie, wie in Aufgabe 4 auf Blatt 6, das zweidimensionale periodische Potential

$$V(\vec{r}) = \cos(x) + \cos(y) \ .$$

a) Zeigen Sie, dass die Geraden $y = (2n+1)\pi \pm x$ ($n \in \mathbb{Z}$) Höhenlinien des Potentials mit $V(\vec{r}) = 0$ sind. (2 Punkte)

b) Skizzieren Sie das Potential für die Wege

$$\begin{aligned} \mathrm{I}: &\quad y = 0 \ , \ 0 \le x \le 2\pi \ , \\ \mathrm{II}: &\quad x = \pi \ , \ -\pi \le y \le \pi \ , \end{aligned}$$

und diskutieren Sie das Verhalten von $V(\vec{r})$ am Punkt $(x, y) = (\pi, 0)$. (2 Punkte)

c) Berechnen Sie das Wegintegral

$$\int_{\vec{a},C}^{\vec{b}} \vec{F}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{r} \ , \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2\pi \\ \pi \end{pmatrix} \ ,$$

durch explizite Auswertung des Integrals entlang des Wegs $C = C_1 + C_2$ mit C_1: $y = 0$, $0 \le x \le 2\pi$; C_2: $x = 2\pi$, $0 \le y \le \pi$. (3 Punkte)

Aufgabe 4: Wegintegral, Arbeit

(4 Punkte)

Gegeben sei folgendes Kraftfeld

$$\vec{F}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} x + y \\ z - xy \\ z \end{pmatrix} \ .$$

Berechnen Sie die von der Kraft $\vec{F}$ entlang der Wege C_i ($i = 1, 2$) geleistete Arbeit ΔA_i mit

$$\Delta A_i = \int_{\vec{a},C_i}^{\vec{b}} \vec{F}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{r} \ , \quad \vec{a} = (0,0,0) \quad , \quad \vec{b} = (1,1,1) \ .$$

Dabei sind die Wege C_i gegeben durch:

$$\begin{aligned} C_1 \ &: \quad \vec{r}(t) = (t, t, t) \quad , \quad 0 < t < 1 \\ C_2 \ &: \quad \vec{r}(t) = (t^2, -t + 2t^2, t) \quad , \quad 0 < t < 1 \end{aligned}$$