Übungsaufgaben zur Vorlesung

Mathematische Methoden für das Lehramt (Ba of Arts)

Priv.-Doz. Dr. R. Bulla

WS 2015/16

Blatt 9: Abgabetermin: Donnerstag, der 07.01.2016, 8:00

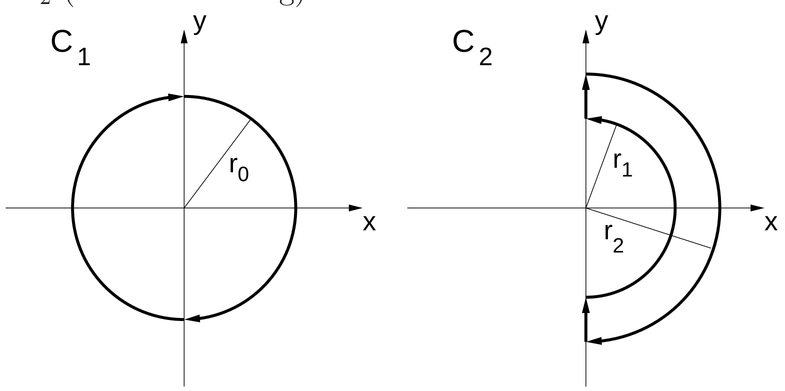
Aufgabe 1: Wegintegrale

(6 Punkte)

Gegeben sei ein Kraftfeld der Form

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \; .$$

Berechnen Sie für dieses Kraftfeld die Arbeit W entlang der beiden geschlossenen Wege C_1 und C_2 (siehe Abbildung).



Aufgabe 2: Differentialgleichungen

(4 Punkte)

Gegeben sind die folgenden vier Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} \mathrm{I}: &\quad f''(x) - 2xf'(x) - 2f(x) = 0 \; , \\ \mathrm{II}: &\quad 4f''(x) + 2f'(x) - 2f(x) = 0 \; , \\ \mathrm{III}: &\quad f'(x) - 2xf(x) = 0 \; , \\ \mathrm{IV}: &\quad f'(x) - 3x^2 f(x) = 0 \; . \end{aligned}$$

Welche der folgenden Funktionen sind Lösungen einer dieser Differentialgleichungen?

$$f(x) = e^{(x^2)} \; , \; f(x) = ae^{(\frac{x}{2})} + be^{(-x)} \; (a, b \in \mathbb{R}) \; , \; f(x) = e^{(x^2+x)} \; , \; f(x) = e^{(x^3)} \; .$$

Aufgabe 3: Klassifizierung von Differentialgleichungen

(4 Punkte)

Gegeben sind folgende Differentialgleichungen:

$$\mathrm{I}: \quad \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} + t\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} + 2 = 0 \quad , \qquad \mathrm{II}: \quad \frac{\partial f}{\partial t} + f(x,t)\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad ,$$

$$\mathrm{III}: \quad \frac{\mathrm{d}^3 x}{\mathrm{d}t^3} + t^4\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - x(t) = 0 \quad , \qquad \mathrm{IV}: \quad (f(x))^4 + \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}x = 0 \quad .$$

Klassifizieren Sie diese Differentialgleichungen nach folgenden Kriterien:

- gewöhnlich/partiell,
- linear/nicht-linear,
- homogen/nicht homogen,
- konstante/nicht-konstante Koeffizienten.

Von welcher Ordnung sind die Differentialgleichungen jeweils?

Aufgabe 4: Differentialgleichungen: Linearkombinationen

(6 Punkte)

Betrachten Sie die folgenden gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung:

$$\mathrm{I}: \quad f(x) + f''(x) = 0 \ ,$$

$$\mathrm{II}: \quad f(x) + f''(x) = 1 \ ,$$

$$\mathrm{III}: \quad (f(x))^2 + f''(x) = 0 \ .$$

Wir nehmen an, dass die beiden Funktionen $g(x)$ und $h(x)$ jeweils Lösungen dieser Differentialgleichungen sind ($g(x)$ und $h(x)$ sollen nicht bestimmt werden). Im folgenden werden Linearkombinationen der Form

$$f(x) = ag(x) + bh(x) \ , \quad \text{mit } a, b \in \mathbb{R} \ ,$$

betrachtet.

a) Zeigen Sie durch Einsetzen, dass diese Linearkombination für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$ ebenfalls eine Lösung der Differentialgleichung I ist. (2 Punkte)

b) Zeigen Sie (ebenfalls durch Einsetzen), dass diese Linearkombination im allgemeinen keine Lösung der Differentialgleichungen II und III ist. (4 Punkte)