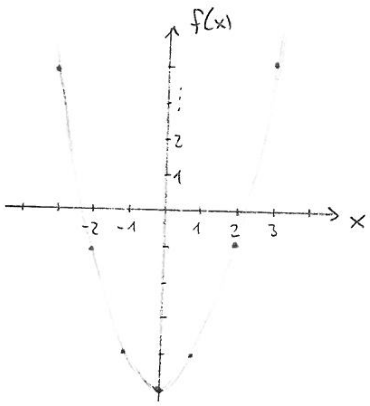
1. Differentiation und Integration

1.1 Funktionen

Beispiel: $f(x) = x^2 - 5$

für $x = 3 \longrightarrow f(3) = 3^2 - 5 = 4$

graphische Darstellung:



allgemein: Funktion f : Abbildung von D nach Z

D : Definitionsmenge

Z : Zielmenge

$\boxed{f : D \longrightarrow Z}$

charakterisiert durch die Zuordnung $\boxed{x \longmapsto f(x)}$ mit $x \in D$

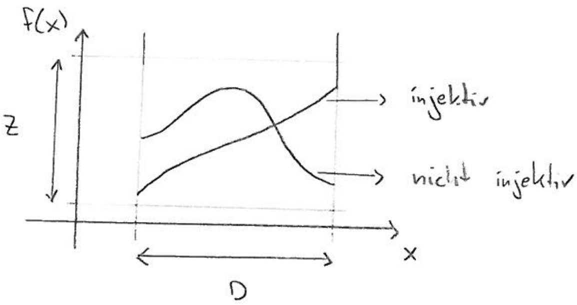
$f(x) \in Z$

in obigem Beispiel: $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto x^2 - 5$

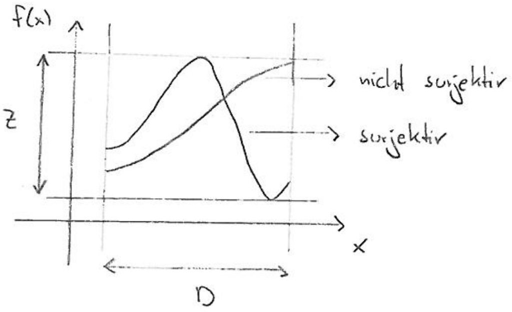
Eigenschaften von Funktionen

1. Injektivität: f ist injektiv, wenn $f(x_1) \neq f(x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in D$ mit $x_1 \neq x_2$

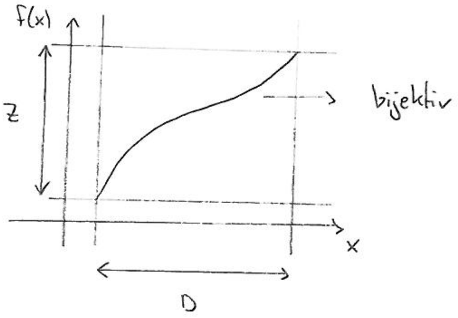


2. Surjektivität : f ist surjektiv, wenn die Bildmenge $f(D) = Z$

mit $f(D) := \{ f(x) \mid x \in D \}$



3. Bijektivität : bijektive Funktionen sind injektiv und surjektiv



weitere Eigenschaften :

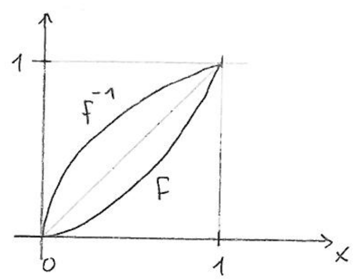
- Monotonie
- Extremwerte
- asymptotisches Verhalten
- Singularitäten
- Symmetrien
- Stetigkeit

Umkehrfunktion

Definition : sei $f : X \longrightarrow Y$ eine bijektive Abbildung, dann ist $f^{-1} : Y \to X$ die Umkehrfunktion von f, wenn gilt :

$$\boxed{f(f^{-1}(y)) = y \quad \text{und} \quad f^{-1}(f(x)) = x}$$ für alle $x \in X,\ y \in Y$

Beispiel :



$f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$

$x \longmapsto x^2$

$f^{-1} : [0,1] \longrightarrow [0,1]$

$y \longmapsto \sqrt{y}$

elementare Funktionen

1. Potenzfunktion

definiert durch $f(x) = x^a$ a: Exponent $\in \mathbb{R}$

Rechenregeln:

$$x^a x^b = x^{a+b}$$

$$(x^a)^b = x^{a \cdot b}$$

$$x^{-a} = \frac{1}{x^a}$$

Polynom nter Ordnung: $f_n(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$

$$n \in \mathbb{N}, \quad a_j \in \mathbb{R}$$

rationale Funktion: der Quotient zweier Polynome $f_m(x)$ und $g_n(x)$

$$\rightarrow h(x) = \frac{f_m(x)}{g_n(x)}$$

2. Exponentialfunktion

definiert durch $f_a(x) = a^x$ a: Basis

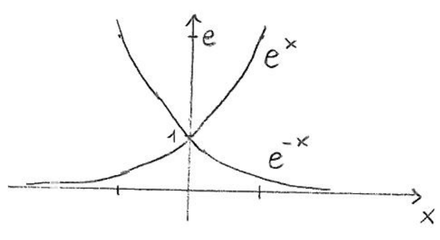
z.B.: $f_2(x) = 2^x$

$f_e(x) = e^x \equiv \exp(x)$ e: Eulersche Zahl $= 2.71828\dots$

Rechenregeln:

$$a^x b^x = (ab)^x$$

$$a^x a^y = a^{x+y}$$



3. Logarithmus

Definition: der Logarithmus zur Basis a, $\log_a(x)$, ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion $f_a(x) = a^x$ $(a > 0)$

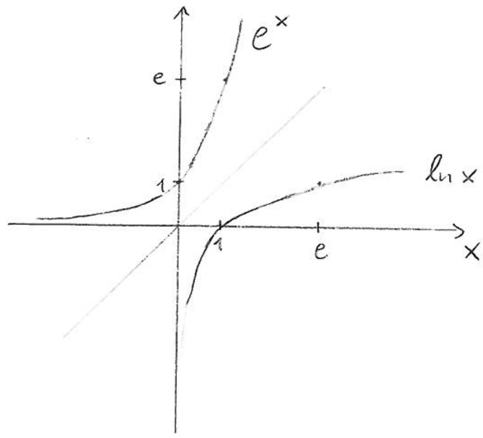
$$f_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \qquad\qquad f_a^{-1} = \log_a : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto a^x \qquad\qquad x \longmapsto \log_a(x)$$

es gilt also : $x = \log_a(a^x)$

$x = a^{\log_a(x)}$

Beispiel : $\log_e(x) \equiv \ln(x)$



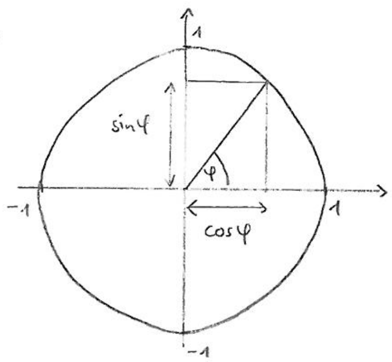
Rechenregeln : $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$

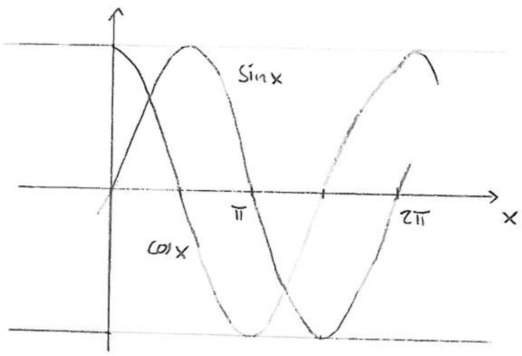
$\log_a(x^r) = r \cdot \log_a x$

außerdem gilt : $a^x = \left(e^{\ln a}\right)^x = e^{x \ln a}$

4. Trigonometrische Funktionen

Einheitskreis :





es gilt : $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

$\sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

Tangens : $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ Cotangens : $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$

Umkehrfunktionen :

cos	$\longleftrightarrow$	arccos	:	Arcuscosinus
sin	$\longleftrightarrow$	arcsin	:	Arcussinus
tan	$\longleftrightarrow$	arctan	:	Arcustangens
cot	$\longleftrightarrow$	arccot	:	Arcuscotangens