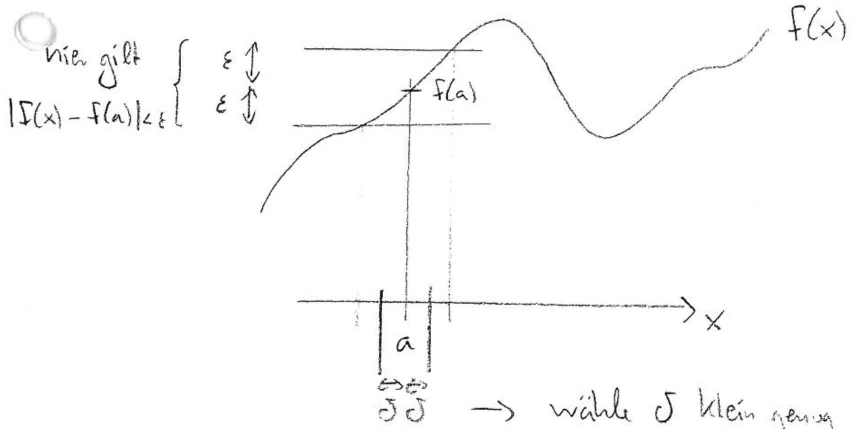
1.2 Stetigkeit, Ableitung

Definition: Stetigkeit

eine Funktion $f(x)$ heißt stetig bei $x = a$, wenn sich für beliebig kleine $\varepsilon > 0$ ein δ finden läßt, so daß

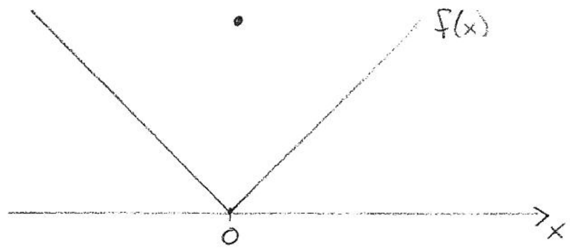
$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \quad \text{für} \quad |x - a| < \delta$$



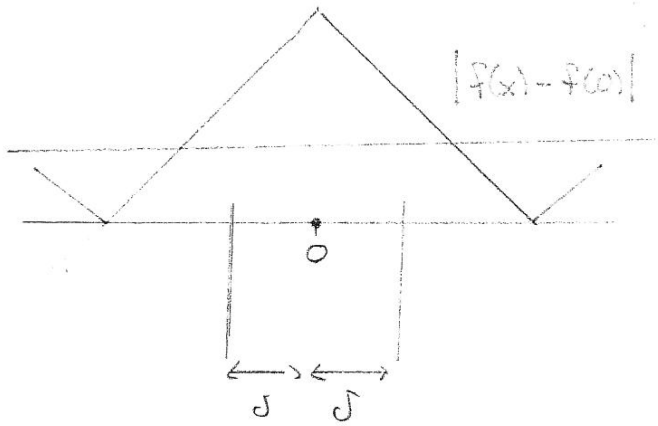
$\rightarrow$ wähle δ klein genug

Gegenbeispiel:

$$f(x) = |x| \qquad x \neq 0$$
$$f(x) = 66 \qquad x = 0$$



$f(x)$ ist nicht stetig bei $x = 0$, denn



ε kann beliebig klein sein

$\Rightarrow$ es existiert kein δ, so daß $|f(x) - f(0)| < \varepsilon$ für alle x mit $|x| < \delta$

Definition: Ableitung einer Funktion $f(x)$ definiert durch den Limes

$$\boxed{\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}}$$

andere Symbole: $f'(x)$; $f^{(1)}$; Df

Beispiel: $f(x) = x^2$

$$f(x+\Delta x) = (x+\Delta x)^2 = x^2 + 2x\,\Delta x + \Delta x^2$$

$$f(x+\Delta x) - f(x) = 2x\,\Delta x + \Delta x^2$$

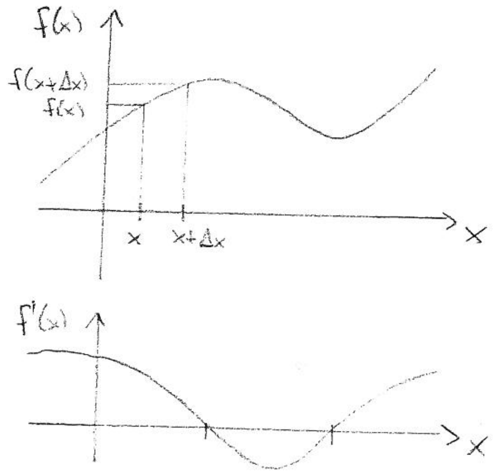
$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = 2x + \Delta x$$

$$\Rightarrow \quad \frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x$$

$$\boxed{f'(x) = 2x}$$

Bemerkungen:

- Ableitung nur definiert wenn $f(x)$ bei x stetig
- Ableitung $f'(x)$ ist selbst eine Funktion von x
- geometrische Interpretation



$\rightarrow$ $f'(x) \mathrel{\hat{=}}$ Steigung der Funktion am Punkt x

Rechenregeln

- $D\left(a\, f(x) + b\, g(x)\right) = a\, Df + b\, Dg$

- Produktregel:

$$D[fg] = g\, Df + f\, Dg$$

- $f(x) = x^n \qquad n = 1, 2, \dots$ | $n=0$: $f(x) = \text{const.}$

$\Rightarrow f'(x) = n\, x^{n-1}$ | $\Rightarrow f'(x) = 0$

- gilt ebenso für $n = -1, -2, \dots$

zB. $f(x) = \dfrac{1}{x} = x^{-1}$

$$\Rightarrow f'(x) = -1 \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

- daraus folgt für $f(x) = \sum_{n=0}^{m} a_n x^n = a_0 + \sum_{n=1}^{m} a_n x^n$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{m} n \cdot a_n\, x^{n-1}$$

- Kettenregel:

Beispiel: $\left.\begin{aligned} f(u) &= u^2 \\ u(x) &= x^2+1 \end{aligned}\right\}$ definiere eine Funktion $g(x) = f(u(x)) = (x^2+1)^2$

für die Ableitung gilt die Kettenregel $\dfrac{dg}{dx} = \dfrac{df}{du}\dfrac{du}{dx}$

in diesem Beispiel: $\left.\begin{aligned} \frac{df}{du} &= 2u = 2(x^2+1) \\ \frac{du}{dx} &= 2x \end{aligned}\right\}$ $\dfrac{dg}{dx} = 4x\,(x^2+1)$

oder direkt: $g(x) = (x^2+1)^2 = x^4 + 2x^2 + 1$

$$\Rightarrow \frac{dg}{dx} = 4x^3 + 4x = 4x(x^2+1) \quad ✓$$

- Quotientenregel

$$D\left(\frac{f}{g}\right) = D(f \cdot g^{-1}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Produktregel}}}{=} \frac{1}{g} Df + f \underbrace{D(g^{-1})}_{\rightsquigarrow \text{ Kettenregel}} = \ldots$$

$$D(g^{-1}) = D(h(g(x))) = \frac{dh}{dg}\frac{dg}{dx} = -\frac{1}{g^2} Dg$$

$\hookrightarrow$ mit $h(g) = g^{-1} \longrightarrow \frac{dh}{dg} = -\frac{1}{g^2}$

$$\ldots = \frac{g}{g^2} Df - \frac{f}{g^2} Dg = \frac{g\,Df - f\,Dg}{g^2}$$

Beispiel: $a(x) = \frac{x}{x^2+1} = \frac{f(x)}{g(x)}$

$$a'(x) = \frac{x^2+1 - x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$