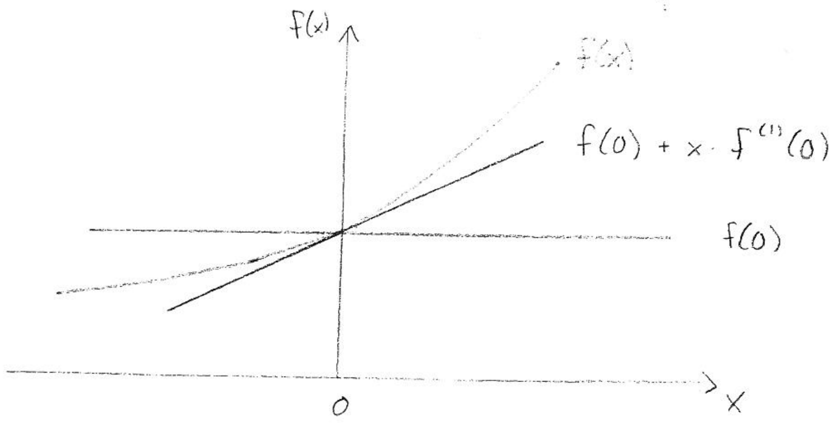
1.3 Taylor-Reihe

Aufgabe: Rekonstruktion einer Funktion $f(x)$ unter Kenntnis der Ableitungen bei $x = 0$:

$$f^{(0)}(0) = f(0)$$
$$f^{(1)}(0)$$
$$f^{(2)}(0)$$
$$\vdots$$



$\Rightarrow$ Konstruiere eine Folge von immer besseren Approximationen

$$f_0(x) = f(0)$$
$$f_1(x) = f(0) + x f^{(1)}(0)$$
$$f_2(x) = f(0) + x f^{(1)}(0) + \frac{1}{2} x^2 f^{(2)}(0)$$
$$\vdots$$
$$f_m(x) = \sum_{n=0}^{m} \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0)$$
$$\vdots$$
$$f_\infty(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0)$$

warum $\frac{1}{n!}$? :

folgt aus der Bedingung $f_m^{(m)}(0) = f^{(m)}(0)$

$$f_m^{(m)}(x)\Big|_{x=0} = m \cdot (m-1) \cdot \ldots \cdot 1 \cdot \frac{1}{m!} f^{(m)}(0) \quad \checkmark$$

$\Rightarrow$ Definition der Taylorreihe einer Funktion $f(x)$

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0)}$$

Beispiele:

- $f(x) = 2 + 5x - 6x^2$

  $\Rightarrow$ Taylorreihe bricht nach dem zweiten Glied ab

denn $f^{(1)}(x) = 5 - 12x$

$f^{(2)}(x) = -12$

$f^{(3)}(x) = 0$ und ebenso alle höheren Ableitungen

$\Rightarrow$ $f^{(0)}(0) = 2$

$f^{(1)}(0) = 5$

$f^{(2)}(0) = -12$

die Taylorreihe hat die Form

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) =$$

$$= f^{(0)}(0) + x f^{(1)}(0) + \frac{x^2}{2} f^{(2)}(0)$$

$$= 2 + 5x - 6x^2$$ wie zu erwarten

- schwieriger: $f(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$ $\quad f^{(0)}(0) = 1$

$\Rightarrow$ $f^{(1)}(x) = -1\,(1+x)^{-2}$ $\quad f^{(1)}(0) = -1$

$f^{(2)}(x) = (-1)(-2)\,(1+x)^{-3}$ $\quad f^{(2)}(0) = 2$

$\vdots$ $\quad \vdots$

$f^{(n)}(x) = n!\,(-1)^n\,(1+x)^{-(n+1)}$ $\quad f^{(n)}(0) = n!\,(-1)^n$

die Taylorreihe hat die Form

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} n!\,(-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

$$= 1 - x + x^2 - x^3 + x^5 + \dots$$

auch: Potenzreihenentwicklung

<u>Achtung:</u> Reihe konvergiert nur für $|x| < 1$ (Beispiel $x = -2$)

- $f(x) = \sin x \longrightarrow f^{(0)}(0) = 0$

$$\Rightarrow \quad f^{(1)}(x) = \cos x \qquad f^{(1)}(0) = 1$$
$$f^{(2)}(x) = -\sin x \qquad f^{(2)}(0) = 0$$
$$f^{(3)}(x) = -\cos x \qquad f^{(3)}(0) = -1$$
$$f^{(4)}(x) = f(x) = \sin x \qquad f^{(4)}(0) = 0$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

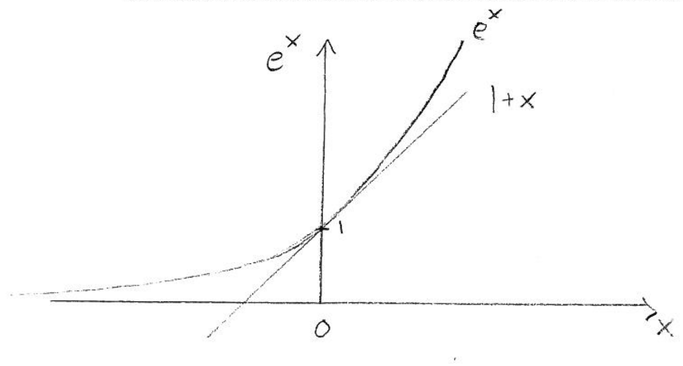
d.h. nur ungerade Potenzen tragen bei

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \sin^{(n)}(0) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} (-1)^m$$

Exponentialfunktion

Definition der Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ über Taylorreihe (Potenzreihe)

$$\boxed{e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots}$$



Ableitung der Exponentialfunktion:

$$\frac{d}{dx} e^x = \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$
$$= \frac{d}{dx} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right]$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$\stackrel{!}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

$$\boxed{\frac{d}{dx} e^x = e^x}$$

Ableitung von a^x:

$$\frac{d}{dx} a^x = \frac{d}{dx}\left(e^{x \cdot \ln a}\right) = \ln a \, e^{x \cdot \ln a} = \ln a \; a^x$$

<u>Ableitung von $\ln x$</u>

$$x = e^{\ln x} \qquad \text{auf beiden Seiten } \frac{d}{dx}$$

$$1 = \frac{d}{dx} e^{\ln x} = \underbrace{e^{\ln x}}_{= x} \frac{d}{dx} \ln x$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}}$$

<u>Darstellung des Logarithmus als Potenzreihe</u>

<u>Achtung:</u> $\ln x$ bei $x = 0$ nicht definiert

$\Rightarrow$ bilde Taylorreihe um $x = 1$

$$f(x) = f(1) + (x-1) f^{(1)}(1) + \frac{(x-1)^2}{2!} f^{(2)}(1) + \ldots$$

$$D^1 \ln x = \frac{1}{x} \quad ; \quad D^2 \ln x = -\frac{1}{x^2} = -x^{-2}$$

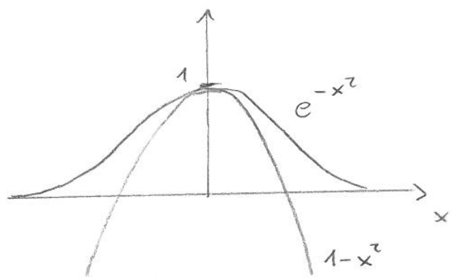
$$D^n \ln x = (-1)^{n+1} (n-1)! \cdot \frac{1}{x^n}$$

$$\Rightarrow \quad f^{(n)}(1) = (-1)^{n+1} (n-1)!$$

$$\Rightarrow \quad \ln x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} + \dots$$

Beispiel:

- $f(x) = e^{-x^2}$



Eigenschaften: $f(0) = 1$

$f(x) = f(-x)$

$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$

$$f'(x) = (-2x) e^{-x^2} \qquad f'(0) = 0$$

$$f''(x) = (-2x)^2 e^{-x^2} - 2e^{-x^2} \qquad f''(0) = -2$$

$\Rightarrow$ Taylorreihe:

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{2}{2!} x^2 + \dots = 1 - x^2 + \dots$$

geht auch direkt über:

$$e^y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} \quad \text{mit} \quad y = -x^2$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} + \dots$$