

I.4 partielle Ableitungen

betrachte im folgenden Funktionen von mehreren Variablen, also

$$f(x, y, z) \text{ oder } f(x_1, x_2, x_3) \text{ oder allg. } f(x_1, x_2, \dots, x_N) \quad N \in \mathbb{N}$$

Def.: partielle Ableitung der Funktion f nach x_i

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x_i} \left[f(x_1, x_2, \dots, x_i + \Delta x_i, \dots, x_N) - f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_N) \right]$$

Beispiel: $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \text{ analog}$$

Ausblick: Kapitel 5, Vektoranalysis

$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ werden zusammengefasst zu

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}}_{= \vec{\nabla}} f = \vec{\nabla} f = \text{grad } f \quad \text{„Gradient von } f \text{“}$$

Def.: Nabla-Operator

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Beispiel (wie oben) $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} f = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{= \vec{r}} = \frac{\vec{r}}{r} \quad \text{mit } r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

höhere Ableitungen

$$\text{z.B. } \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$\text{gemischte Ableitungen: z.B. } \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$\text{es gilt: } \boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}}$$